Z.

Des Hofraths und Professors
der Mathematik und Naturlehre
in Halle,

Wencesl. Joh. Gustav Karstens,

Mathematische Abhandlungen,

theils durch eine Preisfrage
der Königl. Pr. Acad. vom Jahr 1784
über das Mathematisch-Unendliche,
theils durch
andre neuere Untersuchungen
veranlasset.

Mit Kupfern.

Halle im Magdeburgschen
in der Rengerschen Buchhandlung
1786.

Vorrede.

Die nähere Veranlassung zur Entwerfung einer jeden von den folgenden kleinen Abhandlungen habe ich jedesmahl beym Anfange des Vortrages angezeiget: also begnüge ich mich damit, hier nur einige dahin gehörige einzelne Bemerkungen noch mitzutheilen. Ausser den Zusätzen zur ersten Abhandlung, welche gleich nach dem Schlusse dieser Abhandlung auf der 102 bis 112 Seite folgen, findet man am Ende des Buches auf der 423 bis 432 Seite noch einige andre, welche durch spätere mir mitgetheilte Erinnerungen sind veranlasset worden. Wenn ich mich im 25. §. und an mehrern Orten der ersten Abhandlung auf mein neues Handbuch der Analysis und höhern Geometrie, welches zugleich als die zweyte Abtheilung des zweyten Theiles meines mathematischen Lehrbegriffes anzusehen ist, habe beziehen können; so bemerke ich hier noch, daß die Verlagshandlung grade zu der Zeit, als der Druck dieses eben erwehnten Buches besorgt ward, auch eine neue Auflage vom zweyten Theile

des Lehrbegriffes verlangte: diese konnte ich im 80. §. der ersten Abhandlung auf der 92 Seite ebenfalls anführen, weil die Verlagshandlung versprochen hat, sie zur Ostermesse dieses Jahres 1786 abgedruckt zu liefern. Ich habe auch bey Besorgung eben dieser zweyten Auflage, welche nun als erste Abtheilung des zweyten Theiles des mathematischen Lehrbegriffes erscheint, auf die Preisfrage der Königlich-Preussischen Academie da, wo die Grundbegriffe vom Unendlichen gebraucht werden, Rücksicht genommen. Die Lehren von den Potenzen und ihren Wurzeln, von den Logarithmen, von den trigonometrischen Linien und von der Kreismessung, waren in der ersten Ausgabe nur soweit vorgetragen, als man mit Hülfe der ersten Grundbegriffe und Elementarsätze kommen kann, wenn die Gränzen der möglichen Werthe veränderlicher Grössen noch nicht mit in Betrachtung gezogen werden: dagegen sind diese Lehren in der zweyten Ausgabe nach ihrer ganzen Allgemeinheit abgehandelt worden, und das ist aus dem Grunde geschehen, weil sie schon vollständig genug, soweit man sie aus den ersten Anfangsgründen der Rechenkunst und Geometrie herleiten kann, im ersten Theile meiner ma-

mathematischen Anfangsgründe enthalten sind. Diese erste Abtheilung ist nun für Anfänger eine nähere Anleitung, um den ersten Theil des Eulerischen Werkes: Introductio in Analysin Infinitorum, desto leichter zu verstehen; so wie die zweyte Abtheilung als Einleitung zur Eulerischen Differential- und Integralrechnung, auch zum zweyten Theil der Introd. in Anal. Infinitorum dient.

Die zweyte Abhandlung hat ein sehr polemisches Ansehen: doch halte ich mich davon versichert, daß weder diejenigen verdienstvollen Männer, über deren Vortrag in der Lehre von den Parallellinien ich meine Gedanken geäussert habe, noch auch andre Leser meine Absicht dabey verkennen werden. Ich wiederhohle hier meine in der Anmerkung zum 32. §. der zweyten Abhandlung auf der 145 Seite schon gegebene Versicherung, daß ich weit mehr Abneigung als Neigung dazu empfinde, über die Arbeiten andrer Schriftsteller zu urtheilen, besonders in solchen Fällen, wenn ich mit ihnen nicht übereinstimmig denke. Allein es giebt auch Fälle, in welchen es die Achtung, welche man sonst verdienten Schriftstellern schuldig ist, fodern kann, ohne Zurückhaltung es zu sagen, wenn man mit ih-

nen über diese oder jene Lehren in Wissenschaften nicht übereinstimmig denkt. In meinem Lehrbegriffe der gesammten Mathematik erster Theil, dritter Absch. der Geom. 82. §. 257. Seite der 2ten Ausgabe vom Jahr 1782 habe ich schon aus dem zweyten Stück des Leipziger Magazins zur Mathematik, Naturkunde und Oeconomie vom Jahr 1781, des Herrn Professor Hindenburgs erste unter dem Titel: Neues System der Parallellinien, daselbst eingerückte Abhandlung angeführt, aber nur ganz kurz hinzugesetzt,

„der Beweis des Lehrsatzes num. V. auf der 165 und 166 Seite sey für den zweyten Fall noch Erinnerungen unterworfen, wovon vermuthlich im dritten Stück des Magazins von eben dem Jahre mehreres vorkommen werde.„

Ich hatte meine Erinnerungen dem Herrn Professor Hindenburg schon schriftlich mitgetheilt, und konnte um deßwillen jene Vermuthung äussern, die auch in ihre Erfüllung gegangen ist. (M. s. den 36. §. der II. Abhandlung 148. 149. Seite). Im ersten Stück des Leipziger Magazins vom Jahr 1782. 131. u. f. Seiten, findet man ferner eine vom Herrn Professor Hindenburg verfaßte Anzeige von

Vorrede.

der eben angeführten zweyten Ausgabe meines Mathematischen Lehrbegriffes I. Theil, und in derselben die nachstehende hieher gehörige Stelle.

„Was §. 82. S. 257. erinnert wird, daß der Beweis des Lehrsatzes num. V. für den zweyten Fall, den ich im zweyten Stück S. 166. dieses Magazins Jahrg. 1781. gegeben habe, noch Erinnerungen unterworfen sey, worüber vermuthlich im dritten Stück mehreres vorkommen werde; das ist daselbst von S. 346. u. f. auf so eine Art geschehen, daß ich nicht zweifle, Hr. Hofr. K. werde die von mir angeführten Gründe und das ganz neue Verfahren bey meiner Beweisart, gleich andern Kennern, die mich dessen versichert haben, vollkommen überzeugend und befriedigend finden.„

So fand ich es freylich nicht, ich glaubte aber, daß die Schuld vielleicht auf meiner Seite sey. Ich habe oft das Vergnügen, mit dem Herrn Professor Hindenburg mich schriftlich zu unterhalten; weil auch unsre Wohnörter einander sehr nahe sind, so veranlasset das zuweilen eine für mich sehr schäzbare persönliche freundschaftliche Zusammenkunft: indessen hatte ich bisher mich weder schriftlich noch mündlich

lich darüber bestimmt erklärt, ob ich die Beweisart des Herrn Prof. Hindenburg überzeugend fände, oder nicht, obgleich derselbe besonders in einigen Briefen meine Gedanken davon zu wissen gewünscht hatte. Wenn ich also nun die Gründe vollständig aus einander zu setzen gesucht habe, weßwegen ich über diese Beweisart mit dem Herrn Prof. Hindenburg nicht übereinstimmig denke; so ist das Erfüllung einer Pflicht, welche ich demselben als einem verdienten Gelehrten und zugleich als meinem Freunde schuldig bin.

Wegen des fernern Inhalts dieser zweyten Abhandlung, soweit sie des Herrn Hofprediger **Schulzens Entdeckte Theorie der Parallellinien**, Königsberg 1784, betrift, kann ich mich zwar auf den 52. §. der Abhandlung selbst beziehen: indessen ist es vielleicht um einiger Leser willen, die meine Absicht verkennen mögten, nöthig, daran zu erinnern, daß Gelehrte über diese oder jene wissenschaftliche Gegenstände sehr verschieden denken können; daß der eine, wenn er gleich die übrigen Verdienste des andern nicht verkennet, und eben um deßwillen mit einer wahren Hochachtung für ihn eingenommen ist, dennoch die Gründe, warum er den Behaup-

hauptungen des andern nicht beypflichtet, vortragen kann, ohne dadurch dem wohlgegründeten Ruhm, und dem Ansehen, welches der andre in der gelehrten Republik durch seine Verdienste sich erworben hat, zu nahe zu treten. Wer meinen hieher gehörigen Vortrag genau prüfen will, der wird finden, daß es mir nicht so sehr darum zu thun sey, des Herrn Hofprediger Schulzens Theorie von den Parallellinien zu widerlegen, als vielmehr zu zeigen, wie leicht der gemeine Vortrag der Lehren vom Mathematisch-Unendlichen zu fehlsamen Vorstellungsarten und Schlußfolgen verleiten könne: eben dasselbe habe ich auch im 71. §. der Abhandlung selbst geäussert. Diese zweyte Abhandlung stehet eben darum mit der ersten in einer ziemlich genauen Verbindung. Einen Zusatz, welcher mir nicht ganz unerheblich schien, habe ich dem 62. §. der zweyten Abhandlung noch beygefüget, welcher gleich nach dieser Vorrede folget. Eben jetzt, da ich die Vorrede aufsetze, kommt mir das zweyte, als das neueste Stück des **Leipziger Magazins für die reine und angewandte Mathematik vom Jahr** 1786 zu Gesichte, und ich sehe, daß die erste Abhandlung darin die Aufschrift hat: **Theorie der Parallelli-**

nien von Joh. Heinr. Lambert. Laut der beygefügten Anmerkung ist diese Abhandlung im September 1766 aufgesetzt, und mir fiel dabey natürlich der Gedanke ein, es sey nicht wohl abzusehen, wenn der verewigte Lambert auf eine ihn selbst befriedigende Theorie gekommen wäre, warum er sie nicht sollte in seinen Beyträgen zur Mathematik, die später erschienen sind, oder doch sonst bey seinen Lebzeiten bekannt gemacht haben. Hier findet sich unter dem Titel: Vorläufige Betrachtungen, noch nichts, woraus man abnehmen könnte, auf was für einem Wege H. Lambert die Schwierigkeit eigentlich zu heben versucht haben mag. Der Aufsatz ist noch nicht ganz eingerückt, die Fortsetzung soll folgen.

Im fünften Bande der Abhandlungen der Churfürstl. Bayerschen Academie der Wissenschaften, München 1768, findet sich eine von mir verfaßte unter dem Titel: Von den Logarithmen verneinter Grössen. Weil mir nicht allein die richtige Erörterung und Entscheidung der Hauptfrage: ob die Logarithmen verneinter Grössen algebraisch mögliche oder unmögliche Grössen sind? für die Wissenschaft wichtig zu seyn scheint;

son-

sondern auch die Grundlehren von den negativen und algebraisch unmöglichen Grössen immer noch verdienen, daß man sie mehr ins Licht zu setzen suche, um fehlsame Anwendungen davon zu verhüten: so habe ich meinen ehemaligen Vortrag in der angeführten Abhandlung hier noch vollständiger zu machen gesucht. Daraus sind nun zwey besondre Abhandlungen entstanden, welche hier als die dritte und vierte folgen. Man wird finden, wenn man die Vergleichung mit jenem Aufsatze in den Abhandlungen der Churbayerschen Academie anstellen will, daß ich alles von neuen durchgedacht, vieles besser zu ordnen, und überhaupt alles in einem noch bessern Lichte darzustellen gesucht habe.

Die fünfte und letzte Abhandlung stehet noch mit der ersten Abhandlung vom **Mathematisch-Unendlichen** in Verbindung. Bey mehrern Veranlassungen, die ich gehabt habe, für mich darüber nachzudenken, worin die vermeinten Schwierigkeiten bey Euklids Vortrage vom Berührungswinkel wohl gegründet seyn mögten, bin ich darauf verfallen, ob vielleicht besonders neuere Schriftsteller den Begriff davon, was man in der höhern Geometrie **Krümmungswinkel** nennt, von dem nicht gehö-

rig

rig unterscheiden, was gewiß nach Euklids Sinn das **Complement vom Winkel des Halbkreises**, oder nach Wallisens Sinn der **Berührungswinkel** eigentlich seyn soll. Dadurch bin ich bewogen worden in der letzten Abhandlung zu zeigen, daß der Begriff vom Berührungswinkel mit dem Begriff vom Krümmungswinkel nicht verwechselt werden müsse. Alle die bekannten sonderbar genug klingenden Sätze vom Berührungswinkel, in der gemeinen vom Unendlichen hergenommenen Sprache vorgetragen, lassen sich rechtfertigen, und hören auf Schwierigkeiten zu seyn, wenn man sie vom Krümmungswinkel verstehet: nur muß man nicht vergessen, daß alsdenn alles algebraische Sprache, und daß es nicht verstattet sey, so eingekleidete Sätze, wie der 40. §. der V. Abhandlung davon einige Proben giebt, als solche anzusehen, die zur reinen Geometrie gehören. Halle im März des Jahres 1786.

Der Verfasser.

Zusatz

Zusatz zum 62. und 63. §.
der zweyten Abhandlung.

Nach H. Schulzens Behauptung auf der 77 Seite seiner Entdeckten Theorie der Parallelen muß Euklids 9 Grundsatz so ausgedrückt werden:

„das Ganze ist entweder grösser als sein Theil, oder ihm gleich, und daher ist umgekehrt der Theil entweder kleiner als das Ganze, oder dem Ganzen gleich, aber niemahls grösser als das Ganze.„

Hiedurch soll die Schärfe des vom 7 Lehrsatz, 74 Seite, gegebenen Beweises (hier im 60. §.) desto einleuchtender werden, und das sucht der H. Verfasser auf der 78 Seite auf folgende Art einleuchtend zu machen.

„Folgte nemlich in demselben aus der Annahme: FC, DG, stossen nach der Seite C, G, hin niemahls zusammen, dieser Satz: also ist der Theil dem Ganzen gleich; so hätte die Folge nichts Widersprechendes, und die Annahme bliebe also möglich. Allein da aus der Annahme folgt, daß der Theil grösser seyn müsse, als das Ganze; so ist das Widersprechende dieser Folge offenbar, und daher die Annahme unmöglich.„

Wenn man eben so wie Herr Schulze sich erlauben will, algebraische Rechnungssätze, die noch dazu in eine uneigentliche Sprache eingekleidet sind, dem Wortverstande nach als geometrische Grundsätze gelten zu lassen; so kann man leicht noch einen Schritt weiter gehen, und mit Zuversicht behaupten, daß Euklids 9 Grundsatz ganz unbrauchbar sey. Es ist wirklich sogar algebraisch falsch, was auf der 77 S. der Schulzischen Theorie behauptet wird, wie ich hier im 69. und 70. §. bewiesen habe. Gesetzt aber es wäre auch algebraisch richtig, so würde man aus algebraischen Rechnungssätzen eben so bündig beweisen können,

daß auch ein Theil grösser als das Ganze seyn könne, wie ich es im 33. §. der III. Abhandlung bemerkt habe. H. Schulze sagt,

das Ganze ist dem Theile gleich, wenn sein Nebentheil in Vergleichung mit jenem unendlich klein ist, der Ne-

bentheil mag eine endliche Grösse, oder gar selbst unendlich groß seyn.

Ich bin also eben so gut berechtiget zu behaupten:

Das Ganze sey kleiner als sein Theil, wenn sein Nebentheil ihm entgegen gesetzt ist.

Denn es ist $+2 = +5 - 3$ ein algebraisches Ganzes, $+5$ ist ein Theil davon, und es ist $+2 < +5$. Wo bleibt nun die grosse Schärfe in dem Beweise des 7 Lehrsatzes nach der ersten Beweisart? Wenn man dem Herrn Verfasser auch alles zugiebt, worauf er seine Beweisart gründet; so kann man doch zeigen, daß nach seinen eigenen Grundsätzen, und vermöge der Art, wie er algebraische Rechnungsgsätze in die Elemente der Geometrie überträgt, in seinem Beweise keine Folge sey.

Einige Druckfehler und andre Verbesserungen.

39 S. 9 Z. $^{1}\infty$ l. m. $\frac{1}{3}\infty$
46 — 3 Z. v. u. nach l. m. noch
62 — 2 Z. im Nenner $\mathrm{tg}\frac{1}{m}A$, l. m. $\mathrm{tg}\frac{1}{m}\alpha$
63 — 1 Z. Zahl m l. m. Zahl n
— — 24 Z. $\int(\sqrt{dx^2+dy^2})$ l. m. $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$
76 — 18 Z. nescentia l. m. nascentia
77 — 15 Z. nach: Differentialrechnung, setze man hinzu: (hiemit vergleiche man unten den 79. §. 89 S.)
78 S. 8 Z. inconcinae l. m. inconcinne
86 — 13 Z. dS l. m. dT
88 — 9 Z. nad. x l. m. na. dx
92 — 19 Z. Logarithmoenm l. m. Logarithmorum
109 — 20 Z. nach: Euklides? setze man zu: und gehört zu den letzten nicht auch das XII. Buch?
259 S. 3. 4. 8. 9 Z. statt W muß V gelesen werden, und 11 Z. QS l. m. OS
267 S. 11 Z. TH, l. m. FH.

Inhalt.

I. Abhandlung. Vom Mathematisch-Unendlichen.

Veranlassung zur Entwerfung des Aufsatzes 1. 2. §. Das Endliche und Unendlichgrosse der Mathematiker 3 — 17. §. In dem Ausdruck: Unendliche Grösse, liegt kein Widerspruch 18 — 21. §. Das Anstössige der gemeinen Lehre vom Unendlichen 22 — 28. §. Vom Unendlichkleinen und den dahin gehörigen Rechnungsregeln 19 — 33. §. Wahrer Sinn der Rechnungsregeln mit dem Unendlichgrossen 34 — 42. §. Die Gränzen der Verhältnisse und Summen 43 — 66. §. Die Fluxionenrechnung 67 — 80. §. Ueber H. Leonh. Eulers Differentialrechnung 81 — 89. §. Einige Zusatze zum 8. 35. 46. §.

II. Abhandlung. Von den Parallellinien und den Bemühungen die Theorie davon zu ergänzen.

Kurze Einleitung 1 — 16. §. Entwurf einer Theorie von den Parallellinien 17 — 32. §. Andre neuere Bemühungen diese Theorie zu ergänzen, besonders des Herrn Professor Hindenburgs neues System der Parallellinien 33 — 49. §., und des Herrn Hofprediger Schulzens Entdeckte Theorie der Parallelen 50 — 76. §.

III. Abhandlung. Von verneinten Grössen und unmöglichen Wurzelgrössen.

Ursprung des Begriffes einer negativen Grösse aus Anwendung der Subtractionsregeln 1 — 4. §. Allgemeinere Begriffe von entgegen gesetzten Grössen 5 — 13. §. Anwendung davon auf die Geometrie und Ursprung der allgemeinen algebraischen Grundoperationen nach des Cartes 14 — 20. §. Unmögliche Wurzelgrössen 21 — 22. §. Vergleichung der Carteslschen Vorstellungsarten hievon mit dem Vortrage älterer Algebraisten 23 — 31. §. Eben diese Lehren nach dem Lehrvortrage eines Newton, Hausen und andrer neuerer Schriftsteller 32 — 38. §. Ausdehnung dieser Begriffe auf Winkel, Flächen und körperliche Grössen, besonders bey Integrationen 39 — 56. §. Herrn Kühns vermeinte Construction der unmöglichen Wurzelgrössen 57 — 65.

IV. Ab-

Inhalt.

IV. Abhandlung. Von den Logarithmen der verneinten und unmöglichen Wurzelgrössen.

Es ist nicht gleichgültig, wie man davon denkt 1—5. §. Kurze Nachrichten von der Streitigkeit darüber zwischen Leibnitz und Bernoulli auch Euler und d'Alembert 6—12. §. Grundbegriffe der Lehre von den Logarithmen auch nach Stiefel und Neper 13—17. §. Cotesens Sprachgebrauch und dessen Vertheidigung gegen Herrn d'Alembert 18—21. §. Eigentlicher Sinn der Frage: ob Logarithmen verneinter Grössen möglich sind? auch ihre Beantwortung 22—28. §. Allgemeinste algebraische Theorie von den Logarithmen 29—36. §. Beantwortung der Zweifel der Herrn d'Alembert und Bernoulli gegen die Lehre der Herrn von Leibnitz und Euler 37—68. §. Erläuterung der allgemeinen Eulerischen Theorie vermittelst der geometrischen Construction 69—77. §.

V. Abhandlung. Vom Berührungswinkel und Krümmungskreise.

Geometrische Lehrsätze vom Winkel des Halbkreises mit dem Durchmesser und der Tangente in dessen Endpunct nach Euklids Vortrage 2—5. §. Vermeinte Schwierigkeiten dabey und ihre Erörterung 6—18. §. Erweiterung des Begriffes vom Berührungswinkel auch wenn die krumme Linie kein Kreis ist 19. §. Begriffe von der Krümmung 20—22. §. Gleichförmige Krümmung des Kreises 23—27. §. Der Krümmungswinkel (28. §.) Ungleichförmige Krümmung solcher Linien, die vom Kreise verschieden sind 29—36. §. Der Krümmungshalbmesser 37. §. Berührungswinkel und Krümmungswinkel sind nicht einerley: jeder Berührungswinkel ist = 0, Krümmungswinkel können alle mögliche Verhältnisse gegen einander haben 38—40. §.

I. Vom

I.

Vom

Mathematisch-Unendlichen

mit Rücksicht

auf eine im Jahr 1784.

aufgegebene Preisfrage.

Als die nachstehende I. Abhandlung völlig aufgesetzt, und schon in die Druckerey gegeben war; äusserten einige einsichtsvolle Freunde, welche sie in der Handschrift gelesen hatten, daß es vielleicht manchen Lesern, die in der Mathematik nicht sehr geübt wären, angenehm seyn mögte, einige Stellen noch etwas mehr erläutert zu sehen. Daraus sind am Ende der Abhandlung einige Zusätze entstanden. Ich will davon nur eine Stelle hier zur Probe anführen. Im 8. §. habe ich die analytisch-trigonometrischen Grundformuln als bekannt vorausgesetzt: vielleicht ist es nicht jedem Leser geläufig, damit umzugehen, deßwegen habe ich am Ende den diesen §. betreffenden Zusatz beygefüget.

Veranlassung zur Entwerfung dieses Aufsatzes.

1. §.

Wer über die im verflossenen Jahre 1784 von der mathematischen Classe der Königl. Preuß. Academie der Wissenschaften aufgegebene Preisfrage eine Abhandlung aufzusetzen willens gewesen ist, um sie als Wettschrift einzuschicken, der wird damit fertig geworden seyn, und sie vermuthlich früher abgeschickt haben, als mein Aufsatz vertheilt und bekannt werden kann: also greife ich niemanden vor, wenn ich meinem neuen Handbuche der Analysis und höhern Geometrie, welches zugleich die zweyte Abtheilung des zweyten Theiles meines mathematischen Lehrbegriffes ausmacht, eine Abhandlung vom Mathematisch-Unendlichen, und über die eigentlichen Grundsätze der sogenannten Rechnung des Unendlichen, beyfüge. Uebrigens war es natürlich, daß die Preisfrage meine Aufmerksamkeit auf sich ziehen muste, weil sie mir grade zu der Zeit bekannt ward, als ich mit Ausarbeitung dieses Handbuches der Analysis mich zu beschäftigen den Anfang machte. Ich setze die ganze Stelle aus der von der Königl. Preuß. Academie der Wissenschaften im Jahr 1784 bekannt gemachten Nachricht hieher.

L' utilité qu'on retire des Mathématiques, l'eſtime qu'on a pour elles, et l'honorable dénomination de *Sciences exactes* par excellence qu'on leur donne à juſte titre, ſont dues à la clarté de leurs principes, a la rigueur de leurs démonſtrations, et a la préciſion de leurs théoremes. Pour aſſurer à cette belle partie de nos connoiſſances la continuation de ces précieux avantages, on demande

une théorie claire et préciſe de ce qu'on appelle Infini *en Mathématiques.*

On ſçait que la haute Géometrie fait un uſage continuel *des infiniment grands* et des *infiniment petits.* Cependant les Géometres, et même les Analyſtes anciens, ont évité ſoigneuſement tout ce qui approche de l'Infini; et de grands Analyſtes modernes avouent que les termes *grandeur infinie* ſont contradictoires.

L'Académie ſouhaite donc qu'on explique comment on a déduit tant de théoremes vrais d'une ſuppoſition contradictoire, et qu'on indique un principe ſûr, clair, en un mot vraiment mathématique, propre à être ſubſtitué a l'*Infini*, ſans rendre trop difficiles, ou trop longues, les recherches qu'on expédie par ce moyen. On exige que cette matière ſoit traitée avec tout la généralité, et avec toute la rigeur, la clarté et ſimplicité poſſibles.

2. §.

Sollten wir denn wieder beynahe ein Jahrhundert zurück in die Zeiten eines Rolle und Nieuventyt verſetzt ſeyn? Das Lehrgebäude, welchem nach dem eigenen Zeugniſſe der Academie der Wiſſenſchaften die ehrenvolle Benennung einer völlig genauen Wiſſenſchaft ganz vorzüglich und mit Recht gegeben wird, ſollte auf eine ſich ſelbſt widerſprechende Vorausſetzung gebauet ſeyn? Dafür kann die Wiſſenſchaft nicht, daß es auſſer den guten Schriftſtellern auch mittelmäſſige und ſchlechte giebt; daß

ſelbſt

selbst grosse Rechner mit den Gründen oft nicht genug bekannt sind, wovon die Regeln abhängen, nach welchen sie übrigens ganz richtig rechnen; daß nicht allein der Begriff vom Unendlichen, sondern auch mehr andre abstracte mathematische Begriffe fehlsam angewandt werden; daß man Vorstellungen im Verstande von dem, was wirklich Sache ist, oft nicht gehörig unterscheidet; daß man die Ausdrücke vom Unendlichen oft da anbringt, wo sie gar nicht hingehören. Beyspiele von dem allen mag ich nicht anführen, damit es nicht scheine, als wenn ich Lust zu tadeln hätte, wovon ich doch weit entfernt bin.

Das Endliche und Unendlich grosse der Mathematiker.

3. §.

Wer sich eine grade Linie denkt, der denkt sich gewöhnlich zugleich einen Anfangs- und Endpunct: die Stelle aber, wo der Endpunct seyn soll, ist oft gleichgültig, wenn gleich die Stelle für den Anfangspunct festgesetzt ist. Man erinnere sich an einen gradlinichten Winkel, wovon es aus den ersten Anfangsgründen bekannt ist, daß seine Schenkel lang oder kurz seyn können, ohne daß solches die Grösse des Winkels ändert. Die Länge einer solchen Linie ist unbestimmt, in der lateinischen Sprache sagt man recta indeterminata, indefinita, auch wohl infinita, man muß aber alsdenn das letzte Wort nicht mit dem deutschen unendlich grosse Linie für gleichgültig nehmen. Bey den logischen Schriftstellern kommt das Wort infinitum ebenfalls in der Bedeutung vor, daß es mit dem indeterminato oder indefinito gleichgültig ist. In andern Fällen ist nicht allein die Stelle des Anfangspuncts, sondern auch des Endpuncts der graden Linie festgesetzt, alsdenn ist zugleich die Länge der Linie oder ihre Grösse bestimmt.

stimmt. Lateinisch sagt man recta longitudinis determinatae, definitae, auch finitae: dieses letztere Wort aber ist in der eben angezeigten Bedeutung mit dem deutschen Worte endliche Linie nicht ganz gleichgültig.

4. §.

Jede Seitenlinie einer gradlinichten Figur, also auch jede Seitenlinie eines Dreyeckes, hat ihren Anfangs- und Endpunct, ihre beyden Gränzpuncte; sie ist also eine begränzte Linie, man kann angeben, wo sie anfängt und aufhört. Eine solche Linie hat eine endliche Grösse, und in diesem Sinne ist das Wort endlich eben so viel als begränzt. Ist vielleicht von einer solchen Figur, etwa von einem Dreyeck im allgemeinen die Rede, wie wenn es hiesse, alle Winkel des Dreyeckes zusammen machen die Summe zweyer rechten Winkel aus; so ist zwar die eigentliche Länge jeder Seitenlinie nicht bestimmt: weil man aber an drey grade Linien denken muß, die einen Flächenraum ringsumher einschliessen, so ist man doch genöthiget, jede dieser Seitenlinien mit einem Anfangs- und Endpunct, mit zweyen Gränzpuncten zu denken. Die Länge einer Linie, die man sich als Seitenlinie einer Figur begränzt denken muß, kann also noch unbestimmt seyn.

5. §.

Bey Verzeichnung eines Dreyeckes kann wenigstens die Länge einer Seitenlinie willkührlich angenommen oder sonst vorgeschrieben oder bestimmt seyn. Wenn man über dieser Seitenlinie als Grundlinie das Dreyeck zeichnet; so kann man ihre beyden Gränzpuncte zugleich als die beyden Anfangspuncte der beyden übrigen Seiten ansehen, die sich oben in der Spitze des Dreyeckes als in ihrem gemeinschaftlichen Gränzpunct endigen. Ist überdem die Grösse der beyden Winkel an der Grundlinie vorgeschrieben; so ist es nicht mehr willkührlich, wie lang die übrigen beyden Seiten werden sollen; ihre Länge ist festgesetzt,

und

und zugleich die Stelle, wo die Spitze hinfallen muß, sobald die Länge der Grundlinie und die Grösse der anliegenden Winkel festgesetzt ist. Aendert man aber nur eins von diesen Stücken, so erhält die Spitze eine andre Stelle, auch ändert man dadurch zugleich die Länge der übrigen beyden Seitenlinien.

6. §.

Hat man nicht allein die Länge der Grundlinie sondern auch die Grösse eines anliegenden Winkels festgesetzet; so ist es nicht mehr ganz willkührlich, wie gros man den andern anliegenden Winkel annehmen will: denn es ist ein bekannter Elementarsatz, daß die Summe zweyer Winkel im Dreyeck, kleiner als zwey rechte Winkel seyn müsse. Wenn also der eine von beyden Winkeln an der Grundlinie ein rechter Winkel seyn soll; so muß der andre ein spitzer Winkel seyn. Macht man diesen auch 90° groß, so erhalten die beiden Seiten, welche sich oben in der Spitze des Dreyeckes schneiden sollten, die parallele lage, sie können einander nicht mehr schneiden, man erhält also kein Dreyeck, weil die Spitze als der gemeinschaftliche Endpunct der beyden Seitenlinien fehlt, die in den Gränzpuncten der Grundlinie ihre Anfangspuncte haben. Macht man den einen Winkel = 90° und den andern auch nur um etwas sehr weniges grösser als 90°; so giebt es wieder einen Durchschnittspunct, der aber nun nicht oberhalb sondern unterhalb der Grundlinie liegt. Auf diesen ganz bekannten sehr leicht faßlichen Grundlehren beruhet der Begriff von dem, was man in der Mathematik Unendlich-groß nennet.

7. §.

Der Mathematiker redet in zweyen verschiedenen Sprachen, nachdem die eine oder die andre den Untersuchungen, welche er anstellet, mehr angemessen ist. Die al-

algebraisch-analytische Sprache ist von der geometrischen verschieden: jene Sprache ist kürzer als diese, sie setzt den Mathematiker in den Stand, eine grosse Menge solcher besondern Fälle, die von einem gemeinschaftlichen Gesetz abhängen, in einen einzigen kurzen Ausdruck zu bringen, so daß er alle Fälle mit einem Blick übersieht, nicht anders, als wenn es einziger besondrer Fall wäre. Wenn die Grundlinie des Dreyeckes und der eine anliegende Winkel ihre vorgeschriebene Grösse haben, der andre anliegende Winkel aber vielleicht noch alle mögliche Aenderungen leiden kann; so giebt es sonst in allen Fällen ein Dreyeck, man mag diesen veränderlichen Winkel so groß oder so klein nehmen als man will, nur wie sich von selbst versteht, nicht wenn derselbe $=0$ oder $=180°$ ist, aber auch alsdenn nicht, wenn er den andern Winkel zu $180°$ ergänzt. Der Analyst findet es nicht nöthig, diese besondern Fälle zu unterscheiden, das würde ihm seine Sprache zu weitläuftig machen. Diese ist den kurzen algebraischen Zeichen angemessen, welche jedesmahl eben dasselbe anzeigen, was die geometrische Sprache umständlicher mit Worten ausdrücken würde.

8. §.

Das Dreyeck sey rechtwinklicht, die Grundlinie $=b$, die anliegende Perpendiculärseite $=p$, die Hypothenuse $=h$, der spitze Winkel an der Grundlinie $=\alpha$, der gegenüberstehende oben an der Spitze $=\beta$: so ist in der Sprache des Analysten allemahl $\beta = 90° - \alpha$, $p = b.\ \text{tang.}\ \alpha = \frac{b\ \text{sin.}\ \alpha}{\text{cos.}\ \alpha}$, $h = b\ \text{sec.}\ \alpha = \frac{1}{\text{cos.}\ \alpha}.b$. Wenn nun gleich in dem besondern Fall $\alpha = 90°$ kein Dreyeck vorhanden ist, so kann der Analyst doch so reden, als wenn noch eines da wäre. Die Geometrie sagt, p und h werden immer grösser, wenn α grösser wird, wie lang

p oder h sey, kann man allemahl angeben, so lange $\alpha < 90°$ ist, nur in dem Fall $\alpha = 90°$ giebt es für p und h keinen Durchschnittspunct also auch keinen Endpunct mehr. Hiebey könnte alles sein Bewenden behalten, denn die Frage: wie lang nun p oder h sey? fällt von selbst weg, weil beyde keinen Endpunct mehr haben. Die analytische Formul sagt, in diesem Falle sey sin. $\alpha = $, und cos. $\alpha = 0$, mithin sowohl p als auch h $= \frac{1}{0}$. b. Der Factor b ist eine Linie von vorgeschriebener Grösse, es ist die Grundlinie des Dreyeckes, das nun einen Winkel $\beta = 0$ hat, und zwey Seiten, wovon jede $= \frac{1}{2}$. b ist. So redet der Analyst kurz und gut, nicht anders, als wenn noch ein Dreyeck da wäre, ob er gleich diese Sprache sehr gut in die geometrische zu übersetzen weiß. In allen andern Fällen ist $p = \frac{b \sin.\alpha}{\cos.\alpha}$, $h = \frac{1}{\cos.\alpha} b$; $\frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha}$, so wie $\frac{1}{\cos.\alpha}$ sind Zahlen, die man aus den trigonometrischen Tafeln nehmen kann: demnach müste auch in dem Fall, wenn $\beta = 0$ ist, $\frac{1}{0}$ eine Zahl seyn, welche anzeigte, wie vielmahl b in p oder h enthalten sey, so wie dieses in allen andern Fällen die Zahl $\frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha}$ oder $\frac{1}{\cos.\alpha}$ anzeigt. Was ist also $\frac{1}{0}$ für eine Zahl? Es scheint, man könne antworten: das was in der Rechenkunst dividiren genannt wird, sey ein Verfahren, welches nur so lange seine Anwendung finde, als cos. α noch nicht $= 0$ sey, daher sey $\frac{1}{0}$ ein Zeichen, das gar keinen Quotienten weiter bedeuten könne. Allein man würde eben so beweisen können, daß 1×0 kein Product weiter bedeuten könne, und wir setzen doch ohne Bedenken $1 \times 0 = 0$, ja wir setzen jedes Product $a \times 0 = 0$, es mag a seyn was man will, wenn es nur eine Zahl oder Grösse ist, die sich angeben lässet. Kann aber die 0 als Factor gebraucht werden, warum auch nicht als Divisor?

9. §.

Eigentlich kann man nur mit einer ganzen Zahl multipliciren, und wir multipliciren doch auch mit Brüchen: wir sagen $\frac{1}{2}$ mahl 12 ist 6, $\frac{1}{3}$ mahl 12 ist 4, u. s. w. Dieser der Sache schon nicht ganz genau mehr angemessene Sprachgebrauch rührt vornemlich daher, weil wir es bey ganzen Zahlen gewohnt sind, die Ordnung der Factoren auch umzukehren: denn 5 mahl 7 ist mit 7 mahl 5 einerley. Daß 12 Hälften 6 Ganze, 12 Drittel 4 Ganze machen, also 12 mahl $\frac{1}{2} = 6$, 12 mahl $\frac{1}{3} = 4$ sey, ist klar: das kehrte man wie bey ganzen Zahlen um, und sagte auch $\frac{1}{2}$ mahl 12 $= 6$, $\frac{1}{3}$ mahl 12 $= 4$, u. s. w. Mit einem Bruch, dessen Zähler 1 ist, multiplicieren heißt also eigentlich mit seinem Nenner dividiren.

10. §.

Hält man sich an den ursprünglichen Begriff des Wortes dividiren, so kann man eigentlich auch nur mit einer ganzen Zahl dividiren, wenn es so viel als theilen heissen soll. Weil aber 24 in diesem Sinn mit 3 dividirt 8 giebt, so muß 3 mahl $8 = 24$, mithin wegen der eben bemerkten Eigenschaft der Multiplication auch 8 mahl $3 = 24$ seyn. Der Quotient zeigt also auch an, wie viel mahl der Divisor im Dividendus enthalten sey, und das leitet auf einen andern Begriff vom dividiren, der mit jenem ursprünglichen Begriff nicht schlechthin einerley ist. Indessen hält man sich am gewöhnlichsten an dem Begriff, dividiren heisse die Zahl finden, welche angiebt, wie viel mahl der Divisor im Dividendus enthalten sey. Der Grund, worauf dieser Begriff beruhet, ist aber nicht allgemein, denn zwey Factoren geben in umgekehrter Ordnung nur einerley Product, wenn alle beyde ungenannte oder abstracte Zahlen sind. Die genannte Zahl 5 Pfunde ist ein Product, aber 1 Pfundmahl 5 kann man doch nicht sagen. Selbst alsdenn, wenn das Wort multi-

pli-

pliciren im allgemeinsten algebraischen Sinne genommen wird, müssen doch beyde Factoren von einerley Art seyn, wenn die Verwechselung statt haben soll. Eine Linie mit einer Zahl dividirt giebt eine Linie zum Quotienten: frägt man aber, wie viel mahl eine Linie in einer andern enthalten sey? so ist der Quotient eine Zahl. Doch bleibt es in beyden Fällen richtig, daß Divisor und Quotient ineinander multiplicirt den Dividendus herstellen.

11. §.

Nach diesen Begriffen scheint es unbedenklich, daß man auch die 0 als Factor gelten lassen könne. Denn 7 mahl 0 ist darum 0, weil 7 mahl Nichts auch Nichts ist. Umgekehrt 0 mahl 7 ist keinmahl 7, also ebenfalls Nichts. Die Anwendung des Begriffes vom Dividiren scheint nicht so leicht zu seyn, wenn der Divisor Null seyn soll. Eine Zahl 12 in 0 gleiche Theile eintheilen, das ist eine Redensart, die keinen Sinn zu haben scheint: auch scheint es, daß die Frage, wie viel mahl 0 in 12 enthalten sey? keine verständliche Antwort zulasse. Wenn man sich indessen daran erinnert, daß wir auch mit Brüchen dividiren, so fällt das anstössige jener Redensart schon einigermassen weg. Eine Zahl in $\frac{1}{3}$ gleiche Theile theilen, ist ebenfalls keine recht verständliche Redensart: soll die Division eine eigentliche Theilung seyn, so setzt das voraus, der Divisor müsse eine ganze Zahl seyn. Frägt man dagegen so: wie groß eine Zahl sey, die $\frac{1}{3}$ mahl genommen 12 macht? so kann man antworten, daß es 36 seyn müsse. Hiebey hält man sich nur an den Umstand, daß der Quotient mit dem Divisor multiplicirt den Dividendus herstellen müsse: so wird die Division mit einem Bruch, dessen Zähler 1 ist, eine Multiplication mit dem Nenner, weil die Multiplication mit einem solchen Bruch in der That eine Division mit seinem Nenner war.

12. §.

12. §.

Dieser Redensarten sind wir schon sehr gewohnt, und eben darum stößt man sich nicht mehr daran, obgleich das Verfahren selbst grade das Gegentheil dessen ist, was man sonst dividiren nennt, wenn der Divisor eine ganze Zahl ist. Frägt man, wie viel mahl $\frac{1}{3}$ in 12 enthalten sey? so hängt alles mit dem zweyten Begriff von der Division noch besser zusammen, wenn man sagt, der Bruch $\frac{1}{3}$ sey in jedem Ganzen 3 mahl also in 12 Ganzen 12 mahl 3 mahl $= 36$ mahl enthalten. Offenbar wird bey diesem Verfahren der Dividendus als ein Theil angesehen, woraus man das Ganze unter dem Nahmen des Quotienten wieder herstellen soll: der Dividendus soll in seinem Ganzen so viel mahl enthalten seyn, als der Divisor in seinem Ganzen. Den Divisor stellen wir uns als einen aliquoten Theil eines Ganzen vor, der so und so viel mahl genommen das Ganze ausmacht, welches wir Eins nennen, und eben so viel mahl soll der Dividendus genommen werden, damit das gesuchte Ganze entstehe. Diese Entstehung des Ganzen aus seinem Theile stellen wir uns als eine so lange wiederholte Addition vor, bis das Ganze hergestellet ist, oder welches einerley ist, als eine Multiplication des Theiles mit der Zahl der Theile. Wäre der Theil wirklich $= 0$, so würde das Ganze auf diese Art aus dem Theile nicht mehr entstehen können: denn wir stellen uns vor; daß $m \times 0$ immer 0 bleibe, wie groß auch die Zahl m genommen werde. Wenn also das Ganze für Eins angenommen wird, so kann zwar m mahl 0 nie $= 1$ werden: es kann aber $m \times n = 1$ bleiben, wenn m in eben dem Verhältnisse wächst, in welchem n abnimmt. Es bleibt $2 \times \frac{1}{2}$, $3 \times \frac{1}{3}$, $100 \times \frac{1}{100}$, $10000000 \times \frac{1}{10000000}$ immer $= 1$; das heißt allgemein ausgedruckt, es bleibt allemahl $m \times \frac{1}{m} = 1$.

13. §.

13. §.

Je grösser die Zahl m angenommen wird, desto nä-
her kommt $\frac{1}{m}$ der o. Weil wir nun viel zu sehr ge-
wohnt sind, allemahl an eine Zahl zu denken, die noch grös-
ser werden kann, so scheint es auch, daß nie $\frac{1}{m} = o$
werden könne: denn wenn dieser Fall eintreten sollte, so
könnte m nicht mehr grösser werden. Dem sey aber wie
ihm wolle, wenigstens muß man den Bedingungssatz gel-
ten lassen: wofern $\frac{1}{m}$ die Gränze o erreichen soll; so
muß m eine Menge werden, über die wir nicht hinaus-
zählen, ja eine solche, die wir beym Fortzählen nie er-
reichen können. Diesen Bedingungssatz drückt der Ana-
lyst in kurzen Zeichen so aus; wenn $\frac{1}{m} = o$ werden soll,
so muß $m = \infty$ werden: er braucht eigentlich nur die
Zeichen $\frac{1}{\infty}$ und o als gleichgültige Zeichen. Weil nun
1 mit $\frac{1}{m}$ dividirt, allemahl den Quotienten m giebt: so
ist auch dieser Bedingungssatz wahr: wofern der Divisor
$\frac{1}{m} = o$ werden soll, so muß der Quotient $\frac{1}{o} = \infty$
werden, oder eine Menge die man nicht mehr zählen kann.
Demnach sind auch dem Analysten die Zeichen $\frac{1}{o}$ und ∞
gleichgültige Zeichen, und das will sagen, unter den wach-
senden Zahlen giebt es keine mehr, welche anzeigen könn-
te, wie der Quotient als ein Ganzes aus dem Dividen-
dus als Theil dieses Ganzen entstehen kann, weil es un-

ter den abnehmenden Zahlen keine mehr giebt, die anzeigen könnte, der wievielste Theil von dem für Eins angenommenen Ganzen dem Divisor gleich sey.

14. §.

Diesen Schlüssen gemäß drückt das Zeichen ∞ eine Menge aus, die man nicht mehr zählen kann, und es ist eben darum $\frac{1}{0} = \infty$, weil es unter den Brüchen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, u. s. w. keinen giebt, der es anzeigen könnte, der wievielste Theil die Null vom Ganzen sey. Eben darum muß auch das Zeichen $\frac{1}{\infty}$ mit 0, einerley seyn. Wenn man nicht mehr zählen kann, wie viel mahl ein Theil in seinem Ganzen enthalten sey, so ist er gar kein Theil des Ganzen mehr, er ist das, was man mit 0 bezeichnet. Wofern man nun nicht ohne Noth Schwierigkeiten machen will, wo gar keine sind; so folgt aus diesem allen, daß man sich die 0 als den letzten unter allen beständig abnehmenden Brüchen vorstellen kann, als einen Bruch, dessen Zähler 1 ist, dessen Nenner aber die letzte unter allen ganzen Zahlen seyn muß, wovon man sich in Verstande einen Begriff machen kann. Diese letzte unter allen ganzen Zahlen kann man beym Fortzählen nie erreichen, es ist nicht die letzte die man angeben, sondern die letzte, welche sich der Verstand vorstellen kann, und alle denkbare Zahlen sind alsdenn zwischen den beyden Gränzen $0 = \frac{1}{\infty}$ und $\infty = \frac{1}{0}$ enthalten. Was wir Eins nennen, befindet sich in der Mitte zwischen diesen beyden Gränzen. Mit 0 dividiren heißt nun mit $\frac{1}{\infty}$ dividiren, oder mit ∞ multipliciren, und so hängt alles ganz vortreflich mit dem zusammen, was man durch geo-

me-

metrische Zeichnungen ganz sinnlich darstellen kann. Secante und Tangente des rechten Winkels lassen sich mit dem Halbmesser nicht mehr ausmessen, weil sich der Halbmesser mit dem Cosinus nicht mehr ausmessen läßt. Die o und das Zeichen ∞ drücken richtige Begriffe des Verstandes aus, was man für Wörter anstatt dieser Zeichen brauchen will, das ist gleichgültig, wenn sie nur nicht ganz unschicklich gewählt werden. Das Zeichen o sprechen wir ohne Bedenken durch Null aus, warum auch nicht das Zeichen ∞ durch das eingeführte Wort: Unendlich groß? Es drückt eine nicht mehr zählbare Menge aus, das ist der Gedanke, wer das Wort nicht brauchen will, der wähle sich ein anderes.

15. §.

In dem Begriff von einer ausgedehnten geometrischen Grösse liegt nichts, das uns nöthigte, zugleich an den Umstand mit zu denken, ob sie begränzt, oder vielleicht wenigstens zum Theil unbegränzt sey. Der Begriff vom geometrischen Raum überhaupt ist ja nicht der Begriff von der Kugel, der Pyramide, vom Würfel, vom Kegel u. s. w. Der Begriff vom Flächenraum ist nicht der Begriff vom Dreyeck, vom Kreise, von der Ellipse, u. s. w. also ist der Begriff von einer Länge auch nicht der Begriff von einer linie mit festgesetzten Gränzen. Der Begriff von einer Zahl überhaupt ist nichts weiter als die Vorstellung im Verstande von einer Menge: daß diese Menge grade so und so vielemahl Eins enthalte, gehört so wenig in den Begriff von einer Zahl überhaupt, als es in den Begriff eines Flächenraums gehört, daß es ein Viereck, oder ein Kreis sey. Sonst lehren die Philosophen, daß alle solche Begriffe, welche man den Gründen der Vernunftlehre gemäß abstracte Begriffe nennt, nur für die intellectuelle, nicht für die wirkliche Welt gehören, und daß es die Unmöglichkeit des Begriffes nicht beweisen würde,

de, wenn man einwenden wollte, der Begriff sey so, wie ihn der Philosoph in Gedanken bildet, in der wirklichen Welt nicht vorhanden. Selbst die ersten Grundbegriffe der Geometrie, woran sich niemand stößt, sind ja dergleichen abstracte Begriffe. Ein Raum ohne Materie die ihn ausfüllt, eine Fläche ohne Raum den sie begränzt, eine Linie ohne Fläche, wovon sie vielleicht einen Theil des Umfangs oder den ganzen Umfang ausmacht, ein Punct für sich allein ohne eben als Anfangs oder Endpunct einer Linie gedacht; das alles sind Vorstellungen im Verstande, die man gelten läßt. Wenn man aber den Punct ohne die Linie, die sich damit anfängt oder endiget, denken kann, warum auch nicht die Linie ohne Anfangs- oder Endpunct? Warum auch nicht die Zahl als eine Menge von Einheiten, ohne die letzte Einheit, worauf man beym Fortzählen kommen müste. Eine unendlich grosse Zahl kann man nicht angeben, das heißt nichts weiter, als man kann sie nicht mit Ziffern schreiben: eben darum muß man ein andres Zeichen dafür wählen, das den Verstand an die richtige Idee davon erinnert.

16. §.

In der Mechanik ist häufig die Rede vom bloß trägen Körper ohne Schwere, vom Körper der nur einen schweren Punct hat, worin das ganze Gewicht, ja die ganze Masse des Körpers vereiniget ist. Will man denn dergleichen Vorstellungen darum auch für unmögliche Begriffe erklären, weil solche Körper ausser dem Verstande in der wirklichen Welt nicht vorhanden sind? Man braucht dergleichen abstracte, oder wie man sie auch sehr richtig nennen kann, hypothetische Begriffe, als Hülfsmittel zum Erfinden. Was ist der Begriff vom mathematischen Hebel in der Statik, worauf die ganze Wissenschaft beruhet, anders als ein solcher hypothetischer Begriff? Eine grade unbiegsame Linie ohne Schwere:

giebt

giebt es dergleichen auſſer dem Verſtande? Bey dem allen iſt es eine ſehr fruchtbare fictio heuriſtica, das iſt: wie ich glaube, das rechte logiſche Kunſtwort: denn die Anwendung, welche man davon macht, iſt dieſe. Man frägt, wenn die grade unbiegſame Linie, welche für ſich nicht ſchwer ſeyn ſoll, in der Mitte unterſtützt wäre, an beyden Endpuncten aber gleiche Gewichte hingen, was würde der Erfolg ſeyn? Die Antwort iſt, der Hebel würde ruhen, er würde weder ſinken, noch ſonſt in Bewegung kommen; was aber ſeine Mitte unterſtützt, die Unterlage, würde eben ſo viel Druck leiden, als wenn beyde an den Endpuncten der Hebelsarme hängende Gewichte unmittelbar auf den mittlern Punct drückten. Man kann die Frage noch allgemeiner ſo faſſen: wenn nicht etwa nur eine grade unbiegſame Linie, wenn ein bloß träger für ſich nicht ſchwerer feſter Körper von welcher Geſtalt und Gröſſe man will nur zwey gleich ſchwere Puncte hätte, und wenn man ihn in einem Punct unterſtützen könnte, der mitten in der graden Linie zwiſchen den beyden gleich ſchweren Puncten ſeine Stelle hätte, was würde der Erfolg ſeyn? Die Antwort iſt, der Körper würde nicht ſinken, ſich auch nicht um den unterſtützten Punct umdrehen, ſondern völlig in Ruhe bleiben, die Unterlage würde aber eben ſo viel Druck leiden, als wenn der unterſtützte Punct allein ſchwer, und ſein Gewicht ſo groß wäre, als die Summe der Gewichte jener beyden ſchweren Puncte zuſammen, mithin ſo groß, als das Gewicht eines jeden dieſer Puncte doppelt genommen. Das leitet auf den Begriff vom Schwerpunct eines ſolchen Körpers, der nur zwey ſchwere Puncte hätte. Verfolgt man dieſe hypothetiſchen Schlüſſe weiter, ſo kommt man auf den Begriff vom Schwerpunct eines ſolchen Körpers, der in allen Puncten ſchwer iſt, ſo wie wir ihn in der Natur nur haben können.

17. §.

Ich glaube, daß aus diesem Beyspiele zur Genüge erhelle, wie es möglich sey, aus angenommenen Bedingungen viele wahre und richtige Lehrsätze herzuleiten, wenn gleich jene Bedingungen nicht in der wirklichen, sondern nur in der intellectuellen Welt vorhanden sind. Demnach darf es auch nicht befremden, wenn der Mathematiker frägt: was müste aus dem Nenner eines Bruchs, wovon 1 der Zähler ist, werden, wenn der Bruch $= 0$ werden sollte? Eine Zahl, die man eben darum nicht zählen kann, weil keine letzte Einheit vorhanden ist, eine Linie, die man eben darum nicht messen kann, weil sie keinen Endpunct hat, das sind eben so richtige hypothetische Begriffe des Verstandes, als der Begriff von einem blos trägen Körper, der eben darum an jeder Stelle, wo man ihn hinbringt, auch ohne Unterstützung in völliger Ruhe bleibt, weil er nicht aus einer schweren Materie bestehet.

Wenn ein Bruch $\frac{1}{x} = 0$ gesetzt wird, so erhält er einen unter allen möglichen bestimmten Werthen, die er ganz allgemein bezeichnet, wenn sein Nenner x-veränderlich oder unbestimmt ist: der mit dem Werth $\frac{1}{x} = 0$ zusammengehörige bestimmte Werth des Nenners ist $x = \infty$. Jener Werth ist die eine, dieser Werth die andre Gränze aller Werthe einer veränderlichen Grösse, die sich der Verstand vorstellen kann (14. §.). So erhellet, daß das unendliche oder unendlich grosse mit dem unbestimmten (3. §.) nicht einerley sey. Es giebt nur einen bestimmten Werth $x = \infty$, weil es nur einen bestimmten Werth $\frac{1}{x} = 0$ giebt.

In dem Ausdruck: Unendliche Grösse, liegt kein Widerspruch.

18. §.

Der Begriff davon, was das Wort Grösse überhaupt bezeichnen soll, ist äusserst allgemein, und eben darum so sehr einfach, daß er keiner solchen Deutlichkeit fähig ist, wie man fodern müste, wenn eine eigentliche logische Erklärung gegeben werden sollte. Bey dem allen steht in den Schriften sehr einsichtsvoller und verdienter Männer eine vermeinte Definition von der Grösse, die man bald als Definition, bald in Form eines vermeinten Grundsatzes ausdrückt, und alsdenn wie man es gut findet, Gebrauch davon macht, bald die Möglichkeit bald die Unmöglichkeit des Mathematisch-Unendlichen zu beweisen. Die Königlich Preussische Academie hat gewiß das letztere im Sinne gehabt, als in der oben mitgetheilten Anzeige der Preisfrage die Stelle eingeflossen ist: de grands Analystes modernes avouent que les termes *grandeur infinie* sont contradictoires. Herrn Eulers Vortrag in den Institut. Calc. Diff. P. I. Cap. III §. 74. wird freylich jeden Leser, der sich an diese Begriffe noch nicht gewöhnt hat, stutzig machen. Es wird hier als Grundsatz vorausgesetzt: jede Grösse könne ohne Ende vermehrt werden, so wie man auch bey mehrern andern Schriftstellern die vermeinte Erklärung findet: eine Grösse sey, was vermehrt und vermindert werden kann. Aus jenem vermeinten Grundsatze wird a. a. O. gefolgert, es könne keine unendliche Grösse geben; denn diese könne eben darum, weil sie unendlich seyn solle, nicht weiter vermehrt werden, es müsse also die sonst mögliche Vermehrung ihr Ende schon erreicht haben: vermöge jenes Grundsatzes aber könne jede Grösse ohne Ende vermehrt werden, und eins widerspreche dem andern. Im Anfange des 75. §. sagt indessen H. Euler nur, ex eo ipso, quod omnis

quantitas in infinitum augeri poteſt, ſeq i *videtur*, nullam dari quantitatem infinitam; bald nachher aber heißt es: interim tamen non ſolum hujusmodi quantitatem, ad quam incrementis ſine fine congeſtis pervenitur, certo charactere indicare, ſicque debito modo in calculum inducere licet, ſed etiam in mundo ejusmodi caſus exiſtere, *vel ſaltem concipi poſſunt*, quibus numerus infinitus actu exiſtere videatur. Das letzte ſoll aus der ins unendliche fortzuſetzenden Theilbarkeit der Materie erhellen: allein dieſe ſo ſehr unfruchtbaren und durchaus unnützen Unterſuchungen ſollte man längſt der Vergeſſenheit übergeben haben. Wenn man gleich den Raum, den die Materie auszufüllen ſcheint, in Gedanken wie man will theilen kann, ſo folgt doch daraus ſchlechterdings nicht, daß die Materie ſelbſt eben ſo theilbar ſey. Jene Vorſtellung gehört nur für die intellectuelle, und keinesweges für die wirkliche Welt.

19. §.

Bey dieſer ganzen Unterſuchung muß es gar nicht zur Frage kommen, ob auſſer dem Verſtande eine unendlich groſſe Zahl, eine unendlich groſſe Linie, Fläche, u. ſ. w. in der wirklichen Welt vorhanden ſey? genug wenn der Verſtand ſich ſo etwas vorſtellen kann. (14. §.) Soll der vermeinte Grundſatz gelten: jede Gröſſe könne ohne Ende vermehrt werden, ſo kann ſchlechterdings nur von einer noch ausmeßbaren Gröſſe, ſo wie wir ſie gewöhnlich uns im Verſtande vorſtellen, die Rede ſeyn, wie auch die vom H. Euler ſelbſt angeführten Exempel beweiſen. Iſt von einer Zahl die Rede, ſo denkt man ſich eine beſtimmte Menge, ſonſt könnte man ja nicht noch 1 dazu addiren. Iſt von einer Linie die Rede, ſo muß man ja noch an einen Endpunct denken, wenn man ſie darüber hinaus verlängern will. Im Grunde iſt das nichts anders, als die 2te Foderung im 1. Buch beym Euclides, welche

in

in der bekannten sehr genauen und richtigen Uebersetzung, welche wir dem Herrn Lorenz zu danken haben, so gefaßt ist: man fodre, eine begränzte grade Linie stetig in gleicher Richtung zu verlängern. Der Beweis des 1. Satzes im 10 Buch beym Euclides gründet sich auf eine ähnliche Foderung. Wenn A und B ungleich sind, und A so klein als man will, B so groß als man will, angenommen wird; so kann man doch A mit einer so grossen ganzen Zahl n multipliciren, daß $nA > B$ wird. Offenbar setzt das voraus, B müsse noch ausmeßbar seyn.

20. §.

Jeder, der an das richtige philosophisch-mathematische Denken gewohnt ist, muß Hrn. Euler völlig Beyfall geben, wenn er sich a. a. O. 82. §. so erklärt: etiamsi quis neget, in mundo numerum infinitum revera existere, tamen *in speculationibus mathematicis* saepissime occurrunt quaestiones, ad quas nisi numerus infinitus (*mente conceptus* würde ich hinzusetzen) admittatur, responderi non posset. Jener vermeinte Grundsatz ist wenigstens in der Allgemeinheit genommen falsch, wie man ihn hier anwenden will, und man kann ihn ohne Umstände schlechterdings verwerfen: denn man ist eben so gut berechtiget festzusetzen, jede Grösse könne ohne Ende vermindert werden. Daraus würde also folgen, es sey unmöglich, daß eine Grösse $= 0$ werden könne, denn hiemit hätte ja die Verminderung ein Ende. Man muß nur aus den mathematischen Speculationen die Folge nicht ziehen, dari revera quantitatem infinitam, oder numerum infinitum actu existere, wie es H. Euler ausdrückt. Die Sache gehört für die intellectuelle, nicht für die wirkliche Welt, wie alle abstracte Untersuchungen; es ist ein Vortheil der Bezeichnungskunst, eine Abkürzung des Vortrages, der sonst in vielen Fällen ermüdend weitläuftig ausfallen würde. Wenn also vielleicht einige grosse neue-

re Analysten sich so erklärt haben, als fänden sie einen Widerspruch in dem Ausdruck unendliche Grösse; so haben sie die Sache nicht in dem rechten Gesichtspunct betrachtet.

21. §.

Es ist in einem gewissen Sinne richtig: jede Grösse, die noch nicht $= 0$ ist, kann ohne Ende vermindert werden, wenn nemlich die Verminderung nach dem Gesetz erfolgen soll, wie es eine Reihe von Brüchen wie $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, u. s. f. angiebt, oder die geometrische Reihe $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, u. s. f. Daraus aber folgt ja nicht, daß die Verminderung nach keinem andern Gesetz ihr Ende erreichen könne. Vermittelst der Subtraction ist jede Grösse bald auf 0 gebracht, womit die Verminderung ihr Ende nimmt. Eben so ist es auch in einem gewissen Verstande richtig: jede Grösse, die weder 0 noch unbegränzt ist, kann ohne Ende vermehrt werden, wenn sie so aus einer andern als einem Maasse entstehen soll, wie eine Zahl aus ihrer Einheit. Was wir Eins nennen, oder für ein Maaß nehmen, ist etwas das seine bestimmte Grösse, seine Gränzen hat Man mag also dieses Maaß so viel mahl als man will zusammen setzen, was daraus wird ist immer noch begränzt. Eben darum kann die Tangente und Secante des rechten Winkels nicht aus dem Halbmesser, wie eine Zahl aus ihrer Einheit entstehen, und grade das drücken die Zeichen aus tang. $90° = \infty$, sec. $90° = \infty$. Daraus folgt aber nicht, daß das Wachsen der Tangente und Secante nicht nach einem andern Gesetz ein Ende erreichen könne Die Secante als Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreyeckes kann aus der gegen die Grundlinie geneigten lage in die senkrechte lage kommen, und hiemit hat das Wachsen der Secante und Tangente ein Ende.

Das anstössige der gemeinen Lehre vom Unendlichen.

22. §.

Das alles, wird man vielleicht erwiedern, könnte man gelten lassen, wenn die Mathematiker ihr Spiel mit dem Unendlichen nicht weiter trieben. Man findet aber in ihren Schriften nicht allein unendlich grosse, sondern auch unendlich kleine Grössen, und wenn man ihren Versicherungen trauen darf, so kann ein unendlich grosses doch unendlichemahl kleiner als ein andres unendlich grosses, auch ein unendlich kleines unendliche mahl grösser als ein andres unendlich kleines seyn. Ueberhaupt haben die Mathematiker so viele unendlich grosse und unendlich kleine als endliche Grössen, sie haben so gar unendlich viele Ordnungen unendlich grosser und unendlich kleiner Dinge: ja wenn ein unendlich grosses schon wer weiß wie viele mahl unendliche mahl auf einander gehäuft ist, so soll es doch wieder so viel als Nichts gegen ein andres Unendliches seyn. Das heißt doch recht dem menschlichen Verstande Gewalt anthun. Entweder sie reden mit Fleiß eine geheimnißvolle Sprache, wie die Alchymisten, damit ein Ungeweiheter sie nicht verstehe, oder sie lehren das ungereimteste Zeug, was wider allen gesunden Menschenverstand ist.

23. §.

Ich habe nicht viel dagegen einzuwenden, wenn man weiter schliessen will, das letzte sey doch von Männern, welchen man sonst grosse Einsichten zutrauet, nicht zu vermuthen: also müsse wohl das erste wahr seyn. Jede Kunst, jede Wissenschaft, hat ihren eigenthümlichen Sprachgebrauch, ihre technische Sprache, die jeder lernen muß, der sich in den Geheimnissen der Wissenschaft will einweihen lassen. Mit der Wissenschaft, die

man Analysis des Unendlichen nennt, hat es ohnehin noch eine ganz eigene Bewandniß. Wer Sache und Sprache recht gründlich verstehen lernen will, der muß schon mit nöthigen Vorkenntnissen versehen, er muß im eigentlichen Sinne ein Geweiheter des Ordens der Mathematiker seyn, und sich bis zu einer gewissen Stufe dieses Ordens empor gehoben haben. Der König von Preussen legte einmahl dem Herrn von Maupertuis die Frage vor: was die Differentialrechnung sey, die Erwiederung des H. von Maupertuis befriedigte den König vollkommen: es habe mit der Differentialrechnung eben die Bewandniß, wie mit dem Geheimnisse der Freymäurer, wer das wissen wolle, der müsse selbst Mitglied des Ordens seyn.

24. §.

Wer indessen meine bisher im Druck erschienenen Schriften gelesen hat, der wird daraus schon haben abnehmen können, daß der sehr häufige Gebrauch der Ausdrücke vom Unendlichen, besonders vom Unendlichkleinen, und die gewöhnliche Einkleidung der sonst richtigen Gründe der sogenannten Analysis des Unendlichen auch selbst dieser Nahme für die Wissenschaft, die eben so gut höhere Analysis, oder schlechthin Mathematische Analysis heissen kann, meinen Beyfall nicht habe. Was man immer noch Analysis des Unendlichen nennt, das beruhet mit der gemeinen Analysi und Algebra auf völlig einerley Gründen, es ist eine zu mehrerer Vollkommenheit gebrachte Algebra, so wie die gemeine Algebra eine zu mehrerer Vollkommenheit gebrachte Regel Cöß war. Lange habe ich schon gewünscht, und wünsche es jetzo mehr als jemahls, daß man früher angefangen hätte, diese uneigentliche Sprache zu vermeiden. Die Wissenschaft verliert ihre gröste Schönheit, die Deutlichkeit und das vollkommen überzeugende des Vortrages. Man redet nicht etwa nur in demjenigen Theile der Mathematik, der vom Un-

Unendlichen den Nahmen führt, diese Sprache, man kleidet ganz unnöthigerweise den Vortrag der schönsten Theorien in der Elementargeometrie eben so ein. Einer der neuesten Schriftsteller belehrt uns sogar, daß wir gleich beym Vortrage der allerersten Elementarsätze den Anfänger mit unendlichen Linien und unendlichen Flächen unterhalten und ihn davon belehren müssen, daß eine unendlich grosse Fläche gleichwohl eine wahre Null in Vergleichung mit einer andern unendlich grossen Fläche sey. Das wird in einem hohen Tone als scharf demonstrirte Wahrheit angekündiget, wenn gleich in dem vermeinten Beweise so schlimme Fehler mit unterlaufen, daß auch der sie für Fehler anerkennen müste, der die ganze gemeine Lehre vom Unendlichen dem Buchstaben nach für wahr hielte.

25. §.

Ich meine, daß ich in meinen bekannten Schriften an mehr als einer Stelle deutlich genug gewiesen habe, was die freylich ganz uneigentliche Sprache, die man in der Differentialrechnung eingeführt hat, sagen wolle, und wie man, um allen Anstoß zu vermeiden, richtiger reden könne, (Matheſis Theor. Elem. atque Sublimior, Anal. Math. Sect. VI. § 70-78. Lehrbegriff der gesammten Mathem. 4 Theil, im VI. Absch. der Mech. im 103. 107. 108. §. Beyträge zur Aufnahme der Mathem. 2tes Stück, 1 Abhandlung, und an andern Stellen mehr). In dem Handbuche der Analysis und höhern Geometrie, welches mit dieser kleinen Abhandlung zugleich die Presse verlassen wird, findet man die ganze Sache im 25. 26. und 27. §, die Ausdrücke von Unendlichkleinen sind daselbst gar nicht gebraucht, und doch ist auf zweyen Seiten alles gesagt, worauf das beruhet, was man Analysin des Unendlichen nennet.

26. §.

Es scheinet, daß der Herr Verfasser der Anfangsgründe der Differenzial- und Integralrechnung zum Gebrauch der Ingenieurs und Artilleristen, Halle 1784, meine obenangeführten Schriften, die doch zum Theil vor mehr denn zwanzig Jahren schon im Druck erschienen sind, nicht gekannt habe, sonst würde er in dem Vorberichte 2. u. 3. S. nicht so reden, als wenn er wohl gar der erste sey, der einen Versuch mache, ob man die Differentialrechnung nicht vortragen könne, ohne die Begriffe von unendlich kleinen Grössen mit einzumischen. Deutschland hätte doch wohl mehrere Anleitungen zur Differential- und Integralrechnung aufzuweisen, welche Ingenieurs und Artilleristen so gut gebrauchen könnten, als die kurz vorhin angeführten nach dem Cours de Mathematiques par M. Bézout verfaßten Anfangsgründe. Des Herrn Tempelhoff Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen zum Gebrauch der Königl. Preuß. Artillerie, Berlin und Stralf. 1770. sind mit verdienten Beyfall aufgenommen worden, und diese hätten doch wenigstens eine Erwehnung verdient. Wer im 6 und 7 Abschnitt der Tempelhoffschen Analysis unter mehrern andern Stellen besonders den 364 §. gelesen hat, und in jenen nach Bézout entworfenen Anfangsgründen den 12 §. damit vergleicht, der wird die Aehnlichkeit des Vortrages des spätern Schriftstellers mit dem Vortrage des frühern nicht verkennen. Bessere Aufklärungen findet der Ingenieur und Artilleriste bey dem neuern Schriftsteller gewiß nicht, als er schon im Tempelhoffschen Werke und mehrern andern finden konnte. Wenn es auf richtige bestimmte und deutliche Darstellung der Grundbegriffe und Grundsätze ankommen soll; so dürfte das Tempelhoffsche Lehrbuch, vornemlich der schon angeführte 6ste und 7te Abschnitt desselben, immer noch den Vorzug behalten.

27. §.

27. §.

Uebrigens sind die Beschuldigungen, welche der neuere Verfasser der Anfangsgründe von 1784 im 15 §. 19. S. andern Schriftstellern zur Last leget, daß sie unendlich kleine Grössen angenommen, und aus einem unmathematischen Grundsatz die Regeln der Differentialrechnung hergeleitet haben, viel zu unbestimmt, und haben den Anschein einer Allgemeinheit, wodurch sie sehr ungerecht werden. Kannte denn der H. Verfasser auch die Kästnerischen Schriften nicht? In diesen hätte er die vollkommenste Belehrung darüber finden können, wie man die bisher üblich gewesene Sprache beybehalten, und dem ungeachtet die Lehren selbst mit völliger geometrischen Schärfe und Deutlichkeit vortragen könne. Daß die vom Berge und dem darauf liegenden Sandkorne hergenommene Erläuterung nicht befriedigend sey, ist keine unserm H. Verfasser eigene Bemerkung. Hr. Leonh Euler hat es in der Vorrede zu den Instit. Calc. Diff pag. XII. schon erinnert, und Herr Hofr. Kästner in den Anfangsgründen der Analys. des Unendl. am Ende des 45. §. 28. S. ebenfalls. Am letztern Orte wird zwar nur erwehnt, daß H. v. Wolff diese Vorstellung gebraucht habe: aber H. v. Leibnitz selbst hat ähnliche Vorstellungsarten gebraucht, (G. G. L. Observatio — de vero sensu Methodi infinitesimalis, in den Actis Eruditorum A. 1712. pag. 168.) und H. v. Wolff hat sie vermuthlich daher entlehnt. Die Gründe worauf H. v. Leibnitz und andre, die ihm folgten, die Differentialrechnung gebauet haben, sind keinesweges unmathematisch, sondern höchstens nur die Sprache.

28. §.

Dem angehenden Mathematiker ist es um deswillen nöthig, daß er diese sonst üblich gewesene Sprache verstehe, weil er sonst in andern Schriften, woraus er seine Kenntnisse sehr vermehren kann, oft Stellen finden wird,

die

die ihm Anstoß verursachen müssen. Man kann ihm auch leicht in einer oder einigen wenigen Anmerkungen das sagen, wie er diese Sprache verstehen müsse. Um aber Mißdeutungen und falsche Anwendungen zu verhüten, um angehende Mathematiker mit der Wissenschaft gleich anfangs in ihrem ganzen Lichte bekannt, und eben dadurch auch um so mehr behutsam zu machen, wenn sie selbst ihre Kräfte versuchen und als Schriftsteller auftreten wollen, vermeide man lieber wenigstens in den Handbüchern der Analysis und höhern Geometrie die etwas anstössige Einkleidung der dahin gehörigen Lehren in die Ausdrücke vom Unendlichen. In den Elementarbüchern der Geometrie und Rechenkunst ist es durchaus unnöthig, diese Sprache zu reden: ja ich getraue mir vermöge meiner mehr als zwanzigjährigen Erfahrung zu behaupten, daß es schädlich sey. Nicht blos mittelmässige sondern auch ganz fähige Köpfe finden gewiß allemahl daben Anstoß, und wenn sie sich darüber wegsetzen, so gewöhnen sie sich an undeutliche Vorstellungen, die ihnen hinderlich werden, wenn sie einem bessern und richtigern Vortrage folgen wollen. Fast bin ich auch geneigt zu glauben, die Königlich Preußische Academie habe durch die vorgelegte Preisfrage eine nähere Veranlassung zu einer Vereinbarung der guten mathematischen Schriftsteller geben wollen, daß man endlich einmal jene uneigentliche Sprache vermeide. Man kann ja völlig mathematisch richtig, und doch wie ich zu behaupten wage, noch kürzer und bündiger reden, ohne die Untersuchungen, welche man so gern mit den Ausdrücken vom Unendlichen durchwebt, zu erschweren, oder zu verlängern. Eines andern neuen Grundsatzes, den die Academie zu fodern scheint, bedürfen wir nicht: die sichern deutlichen und wahrhaft mathematischen Gründe, worauf alles beruhet, sind seit der Zeit, da die Erfinder ihre Entdeckungen bekannt gemacht haben, ebenfalls bekannt gewesen. Ich zweifle nicht, daß

der

der noch weiter folgende Vortrag diese Behauptungen gegen alle Einwendungen sicher stellen werde.

Vom Unendlichkleinen und den Rechnungsregeln, die unendlichkleine Grössen vorauszusetzen scheinen.

29. §.

Der Ausdruck Unendlichklein rührt von der Vorstellung her, wie vermittelst der Division eines Ganzen mit einer veränderlichen beständig wachsenden Zahl der Quotient der Gränze o immer näher gebracht, also kleiner als jeder noch zu bestimmende Bruch werden kann. Sie ist der Vorstellung ganz ähnlich, wie vermittelst der Division mit einer veränderlichen beständig abnehmenden Zahl der Quotient grösser als jede noch zu bestimmende Grösse werden kann, sie sey so groß als man will (14. §.). Kurz, man wählte für das Zeichen $\frac{1}{\infty} = o$ den Ausdruck unendlich klein, weil man für das Zeichen $\frac{1}{o} = \infty$ den Ausdruck unendlich groß gewählt hatte. Ehemalige Vorstellungen von der Sache könnten dem Leser Zweifel übrig lassen, ob ich auch berechtigt sey, das Zeichen $\frac{1}{\infty}$ schlechthin mit o für gleichgültig anzunehmen. Um solchen Zweifeln zu begegnen, muß ich an die oben als Beyspiel gebrauchte sehr bekannte trigonometrische Formul $\frac{1}{\text{sec. } \alpha} = \text{cos. } \alpha$ erinnern. Wenn $\alpha = 90°$ ist, setzt man $\text{sec. } \alpha = \infty$, also $\frac{1}{\infty} = \text{cos. } 90°$. Nach aller Geständ-

niß

niß bezeichnet $\frac{1}{\infty}$ das Unendlichkleine, und nach aller Geständniß ist $\cos. 90° = 0$, also kann $\frac{1}{\infty}$ kein Mittelding zwischen Nichts und Etwas seyn.

30. §.

Wenn ich nun voraussetze, daß $\frac{1}{\infty}$ nichts mehr oder weniger als o bedeutet, so versteht es sich von selbst, daß $a + \frac{1}{\infty} = a - \frac{1}{\infty} = a$ sey, oder daß $\frac{1}{\infty}$ in allen solchen Fällen aus einer Formul wegfallen müsse, wenn die o selbst, oder was vielleicht damit multiplicirt ist, wegfallen muß. Das ist es, was die Regel sagen will:

Das Unendlichkleine verschwinde in Vergleichung mit dem Endlichen.

Vormahls mogte man diese Regel nöthig haben, jetzt ist sie ganz überflüssig. Wenn man bey Anwendung der Differentialrechnung auf die Geometrie oder andre Theile der Mathematik $x + dx = x$, $y + dy = y$ nimmt; so liegt allemahl die Voraussetzung zum Grunde, daß dx oder dy soviel als $\frac{1}{\infty}$, mithin nichts anders als o sey.

Die ehemaligen Zweifel dagegen rühren von den ganz undeutlichen Begriffen her, die man sich davon machte, was dx, dy, eigentlich bedeuten solle.

31. §.

Es sey $y = ax + bx^2 + cx^3 + \ldots$ und $z = fx + gx^2 + hx^3 + \ldots$; so müssen y und z beyde $= o$ werden, wenn man $x = o$ setzt. Dagegen ist der Expo-

nent des Verhältnisses $\frac{y}{z} = \frac{a+bx+ex^2+\ldots}{f+gx+hx^2+\ldots}$, und dieser wird $= \frac{a}{f}$, wenn man $x = o$ setzt: in allen andern Fällen aber ist der Werth des Exponenten $\frac{y}{z}$ von $\frac{a}{f}$ verschieden. Wenn nun gleich in dem Fall $x = o$ nicht weiter gefragt werden kann, wie viel mahl z in y enthalten sey? weil es sich von selbst versteht, daß alle Nullen einerley sind, und weiter keine Grösse haben, die man vergleichen könnte; so läßt sich doch oft durch andre Schlußfolgen beweisen, daß der letzte Werth des Exponenten $\frac{y}{z}$ für den besondern Fall $x = o$ dem Exponenten des Verhältnisses zweyer andrer Grössen gegen einander, welches man eigentlich suchte, gleich seyn müsse. Eben diese Gränze des Verhältnisses y : z stellte man sich sonst als das Verhältniß der dem eingeführten Sprachgebrauch gemäß nun unendlich klein gewordenen Grössen y : z vor, und in diesem Sinne konnte man so reden, als wenn die eine unendlich kleine Grösse z in der andern y so und so viel mahl enthalten sey, oder als wenn zwischen zweyen unendlich kleinen Grössen jedes endliche Verhältniß statt haben könne. Von dergleichen Redensarten sagt H. v. Leibnitz selbst in den Actis Erud. Lipſ. A. 1712. pag. 167. commoditati expreſſionis ſeu *breviloquio mentali* inſervimus, ſed non niſi *toleranter vera* loquimur, quae *explicatione rigidantur*. Eine andre kurz vorhergehende Stelle lautet ſo; Porro ut nego — ita etiam nego proprie dari numerum *infinitum* vel *infinite parvum*. Etſi Euclides ſaepe, ſed ſano ſenſu,

de

de linea infinita loquatur. Infinitum continuum vel discretum proprie nec unum nec totum nec quantum est, etsi analogia quadam pro tali a nobis habeatur; ut verbo dicam est *modus loquendi.* Hiemit wird deutlich genug gesagt, daß man die Ausdrücke nicht nach dem blossen Wortverstande nehmen müsse, also muß man auch so billig seyn, und weder dem H. von Leibnitz, noch andern Männern, die seinen Sprachgebrauch angenommen haben, die anscheinenden Widersprüche zur Last legen.

32. §.

Uebrigens ist es sehr bekannt, daß H. von Leibnitz nie ein eigentliches System von seiner neuen Analysis geliefert, vielmehr das explicatione rigidantur andern überlassen habe. Auch H. Newton hat die Ausdrücke infinite magnum, infinite parvum, die zu der damahligen Zeit nicht mehr ungewöhnlich waren, zuweilen in seinen Vortrag einfliessen lassen: er erklärt sich aber gleich im 1. Abschnitt des 1. Buches der Principiorum Phil. Nat. Mathem. sehr bestimmt und deutlich darüber, wie er die Lehren, welche er in diese Sprache einkleidet, wolle verstanden wissen. Man darf nur das dem 11. Lehnsatz beygefügte Scholion gelesen haben, so weiß man, worauf alles ankomme, und daß seine Vorstellungen von der Sache grade diejenigen sind, die ich im vorigen §. angezeiget habe. Im 2ten Lehnsatz des II. Buches kommt die Sache nochmahl vor, die ersten Grundregeln der höhern Analysis werden hier ebenfalls auf die Begriffe von den Gränzen veränderlicher Verhältnisse zurück geführt. Die Rechnungsregeln sind an sich völlig einerley mit den Rechnungsregeln der gemeinen Algebra, alles übrige kommt nur darauf an, daß man richtige Anwendungen davon zu machen wisse. Den einzigen Grundbegriff davon, was eigentlich Gränze eines Verhältnisses sey, worauf sich die Sache allemahl zurückführen lässet, fasset jeder angehen-

de

de Analyst sehr leicht, so bald er nur in der Buchstabenrechnung, und in der Auflösung vornemlich geometrischer Probleme mit Hülfe der einfachen und quadratischen Gleichungen einige Fertigkeit erlangt hat. Die etwa nöthigen Beweise davon, daß ein Verhältniß, welches man bey Auflösung einer vorgelegten Aufgabe sucht, der Gränze irgend eines andern veränderlichen Verhältnisses, die man nach den bekannten Regeln findet, gleich sey, sind so völlig einleuchtend, als man es von wahrhaft mathematischen Beweisen nur immer fodern kann. Als leicht zu übersehende Beyspiele davon vergleiche man in meinen Anfangsgründen der Analysis und höhern Geometrie den 46. 48. 67. §.

33. §.

Ein Bruch, wie $\frac{ax+bx^2}{fx}$ ist allemahl $=\frac{a+bx}{f}$,

es mag x seyn was man will: also wird $\frac{ax+bx^2}{fx}=\frac{a}{f}$,

wenn man $x=0$ setzt, und $\frac{ax+bx^2}{ax}$ wird bey eben der Voraussetzung $=1$. Will man nun das verschwindende x unendlich klein nennen, und $x^2=0^2$ ein Unendlichkleines einer höhern Ordnung, so kann man $a.0=a.0+b.0^2$ schreiben, und überhaupt $a.0^n=a.0^n+b.0^{n+m}$ wenn n und m positive Zahlen sind. Das ist alsdenn die ehemalige Regel:

Das Unendlichkleine einer höhern Ordnung verschwinde in Vergleichung mit dem Unendlichkleinen einer niedern Ordnung.

Wir bedürfen aber dieser Regel so wenig, als der Regel des 30. §. Denn aus dem Zähler des Bruchs $\frac{ax+bx^2}{fx}$ fällt, wenn man $x=0$ setzt, der zweyte

Theil, welcher den Factor b hat, nicht deßwegen weg, weil x^2 unendliche mahl kleiner als x wird, sondern weil alsdenn nach den bekanntesten Rechnungsregeln in dem gleichgültigen Bruch $\frac{a+bx}{f}$ das Product bx im Zähler für sich schon $=o$ ist. Zuverlässig ist o^2, o^3, nicht mehr oder weniger Null, als es das Zeichen o auch ohne Exponenten anzeigt. Wer bey den Ausdrücken o^2, o^3, was anders zu denken glaubt, der läßt sich durch die Zeichen verführen, und bedenkt nicht, daß o keine Grösse mehr sey, die sich noch auf eine Potenz erheben liesse. Ein geübter Rechner sieht gleich von selbst, daß er den zweyten Theil im Zähler des Bruchs $\frac{ax+bx^2}{fx}$ weglassen müsse, wenn er den Werth des Bruchs für $x=o$ wissen will. Auch aus einem Bruch unter der allgemeinen Form $\frac{ax^m+bx^{m+n}+cx^{m+2n}+\ldots}{fx^m+gx^{m+n}+hx^{m+2n}+\ldots}$ fallen im Zähler und Nenner alle Glieder nach dem ersten bey eben der Voraussetzung weg. Nur das und nichts weiter will die Regel sagen, das übrige ist Spielwerk mit Worten, und die Regel selbst ist ganz unnütz, ja schädlich, weil sie nur Verwirrung anrichtet.

Wahrer Sinn der Rechnungsregeln mit dem Unendlichgrossen.

34. §.

Für das Unendlichgrosse hat man eine Regel, die der Regel für das Unendlich kleine im 30. §. ganz ähnlich zu seyn scheint:

Das Endliche, heißt es, verschwinde in Vergleichung mit dem Unendlichen.

Diese Regel hat aber einen ganz andern Sinn als jene Regel des 30. §, sie kann sehr leicht mißverstanden werden, und hat eben darum auch mehr als jene Regel zu fehlsamen Anwendungen Anlaß gegeben. Es wäre schlechterdings falsch, wenn man schlechthin $\infty + a = \infty$ setzen wollte. In solchen Fällen, wenn man auf eine Gleichung von dieser Form kommt $\infty + a = \infty$, darf man nicht auch $\infty = \infty$ annehmen, und nun diese Gleichung von jener subtrahiren, da dann die Schlußfolge $a = 0$ kommen würde. Eben so wenig kann man aus der Gleichung $\infty + a = \infty$ unmittelbar die Folge $a = \infty - \infty = 0$ ziehen. Die Regel will nichts weiter sagen, als daß $\frac{a}{\infty} = 0$ sey, weil $\frac{a}{\infty}$ nicht anders ist, als $a.\frac{1}{\infty} = a.0$.

Wenn eine Formul wie $y = \frac{bx+a}{fx}$, oder $y = \frac{bx+a}{fx+g}$, vorkommt; so weiß man, daß auch im ersten Fall $y = \frac{b+a:x}{f}$, oder im zweyten Fall $y = \frac{b+a:x}{f+g:x}$ sey. Will man nun wissen, was y werden müste, wenn x unendlich groß werden könnte, so setzt man $x = \infty$, und erhält in beyden Fällen $y = \frac{b}{f}$. Die Grössen a und g fallen unter dieser Bedingung aus der Rechnung weg, nicht darum, weil sie in Vergleichung mit bx und fx Nullen sind, sondern weil $\frac{a}{x} = a.\frac{1}{x}$, so wie $\frac{g}{x} = g.\frac{1}{x}$, sich in a.0 und g.0 verwandeln, wenn man $x = \infty$ setzt. Aus $\frac{x+a}{x}$ wird unter eben der Bedin-

gung $1 + \frac{a}{x} = 1 + \frac{a}{\infty} = 1$. Hiemit hört alle weitere Rechnung auf, und man muß nicht weiter schliessen, also $\infty + a = \infty$, und $a = \infty - \infty = 0$. Was das Zeichen ∞ ausdrückt, ist keine Grösse, die man noch wieder mit andern vergleichen, und womit man die gewöhnlichen Rechnungsoperationen noch vornehmen kann: man wollte auch nur wissen, wie groß der Werth des Bruchs $\frac{a+x}{x}$ in dem Fall $x = \infty$ werde, und $1 + \frac{a}{\infty} = 1$ ist das gesuchte Resultat. Alle Schriftsteller von Gewicht und Ansehen, welche sonst auch bey ihrem Vortrage diese Regeln brauchen, erinnern ausdrücklich, daß das Endliche in Vergleichung mit dem Unendlichen nicht verschwinde, wenn von der arithmetischen Vergleichung, sondern nur, wenn von der geometrischen Vergleichung die Rede sey. (M. s. unter andern H. Eulers Instit. Calc. Diff. Cap. III. §. 96.) Uebrigens ist diese Regel eben so überflüssig, als jene Regel im 30. §. es war: denn es versteht sich das alles von selbst, daß man so rechnen müsse.

35. §.

Zähler und Nenner der Brüche $\frac{bx+a}{fx}$, $\frac{bx+a}{fx+g}$ wachsen mit x, beyde Brüche nähern sich der Gränze $\frac{b}{f}$ desto mehr, je grösser x angenommen wird, und diese Gränze sucht man, wenn man $x = \infty$ setzt. Wenn also y und z Grössen sind, die von x nach jedem andern Gesetz abhängen, so kann es ebenfalls zur Frage kommen, wie

wie sich der Exponent des veränderlichen Verhältnisses $y:z$ oder der Bruch $\frac{y}{z}$ ändere, und was aus demsel-
ben werden müste, wenn x zuletzt wie die Tangente oder Secante eines rechten Winkels völlig unbegränzt, oder unendlich groß würde. Wäre $y = ax^2 + bx + c$ und $z = fx^2 + gx + h$, so hätte man $\frac{y}{z} = \frac{ax^2 + bx + c}{fx^2 + gx + h} = \frac{a + b:x + c:x^2}{f + g:x + h:x^2}$. Ob nun gleich y und z ebenfalls ohne Aufhören wachsen müssen, wenn x ohne Aufhören wachsen soll; so nähert sich doch der Exponent des Verhältnisses $y:z$ der Gränze $\frac{a}{f}$, weil $\frac{b}{x}$, $\frac{c}{x^2}$, $\frac{g}{x}$, $\frac{h}{x^2}$ verschwinden, wenn $x = \infty$ gesetzt wird. Das heißt nun ebenfalls nicht, $z = \infty$ sey in $y = \infty$ so viele mahl als f in a enthalten: denn grade alsdenn, wenn zwey Grössen aufhören endlich zu seyn, fällt alle Vergleichung, mithin alle Rechnung weg. Man will nur wissen, wie groß ist unter allen möglichen Werthen des Exponenten $\frac{y}{z}$ derjenige, unter welchen dieser Werth nicht abnehmen, oder den er vielleicht in andern Fällen nicht übertreffen kann, wenn auch anstatt x alle mögliche wachsende Werthe gesetzt würden. Der Exponent eines solchen Verhältnisses kann kleiner werden, wenn gleich beyde Glieder desselben immer grösser werden, davon geben die zu einerley Winkel gehörige Secante und Tangente ein sehr einleuchtendes Beyspiel. Allemahl ist $\text{sec. } \alpha = \sqrt{(1 + \text{tang. } \alpha^2)}$, also $\frac{\text{sec. } \alpha}{\text{tang. } \alpha} = \sqrt{(1 + \frac{1}{\text{tang. } \alpha^2})}$. Mit dem

dem wachsenden Winkel a werden auch sec. α und tang. α immer grösser, aber der Bruch $\frac{1}{\text{tang. } \alpha^2}$ wird immer kleiner. Soll $\alpha = 90°$ werden, also die Secante in eine mit der Tangente parallele Lage kommen; so muß man tang. $\alpha = \infty$ setzen, und das giebt $\frac{1}{\text{tang. } \alpha} = 0$, mithin $\frac{\text{sec. } 90°}{\text{tang. } 90°} = 1$, als die Gränze, welche der Exponent des Verhältnisses der Secante zur Tangente nie erreicht, so lange der Winkel noch kleiner als $90°$ ist: denn so lange ist allemahl $\frac{\text{sec. } \alpha}{\text{tang } \alpha} > 1$. Eben so ist auch $\frac{ax^2 + bx + c}{fx^2} = \frac{a + b:x + c:x^2}{f}$ allemahl grösser als $\frac{a}{f}$, so wie $\frac{ax^2 - bx - c}{fx^2} = \frac{a - b:x - c:x}{f} < \frac{a}{f}$. Mit dem wachsenden x wird der erste Bruch kleiner, der letzte grösser, der erste aber wird nie kleiner, der letzte nie grösser als $\frac{a}{f}$. Vermöge dieser Formuln kann man so reden, als wenn das eine unendlichgrosse gegen das andre ein endliches Verhältniß hätte. Es kann heissen, Secante und Tangente des rechten Winkels werden gleich groß, ob man gleich beyde nicht mehr mit einander vergleichen kann. Wenn $y = ax^2 \pm bx \pm c$, $z = fx^2$, und $a = 100f$ ist: so wird zuletzt $y = 100\,z$. Das ist kurze analytische Sprache: die richtige der Sache angemessene Sprache ist, des Verhältnisses sec. α : tang. α Gränze sey $= 1:1$, des Verhältnisses $y:z$ Gränze $= 100:1$.

37. §.

Gründlich und richtig denkende Mathematiker haben also keinesweges eben so viele unendlich kleine, und eben so

so viele unendlich grosse, als endliche Grössen. Sie haben nur ein unendlich kleines, welches mit o einerley ist, und ein unendlich grosses, daß sie mit ∞ oder $\frac{1}{0}$ bezeichnen. Wenn das ∞ noch grösser, wenn es 2mahl 3mahl und mehrmahl grösser werden könnte, so würde folgen, daß auch die Null noch bis auf die Hälfte abnehmen, daß sie 3mahl und mehrmahl kleiner werden könnte, als sie vorher war. Wollte man sich $\frac{1}{2}$ ∞, als die Hälfte des Unendlichen, $\frac{1}{3}$ ∞ dreymahl kleiner als ∞ vorstellen; so müste $\frac{1}{2}$ ∞ = $\frac{1}{2.0}$, $\frac{1}{3}$ ∞ = $\frac{1}{3.0}$ seyn, und 2mahl Nichts, dreymahl Nichts müste mehr als Nichts seyn, welches von selbst wegfällt.

38. §.

Mit den mehrern verschiedenen Ordnungen des Unendlichgrossen hat es eine ähnliche Bewandniß, wie mit den vermeinten mehrern Ordnungen des Unendlichkleinen: (33. §.) eine gründliche Mathematik weiß davon nichts. Man kann die Zeichen ∞^2, ∞^3, hinschreiben, wie man a^2, a^3, hinschreibt: wenn aber die Potenzen a^2, a^3, was anders als a bedeuten, so folgt nicht, daß auch ∞^2, ∞^3, was anders als ∞ bedeute. Ueberhaupt sind ∞^n, ∞^m, wenn n und m positive Zahlen seyn sollen, solche Zeichen, die nichts mehr und nichts weniger unendlichgrosses anzeigen können, als das Zeichen ∞ für sich allein ohne Exponenten schon anzeigen würde. Wenn ∞^2 oder $\frac{1}{0^2}$ unendliche mahl grösser als ∞ oder $\frac{1}{0}$ seyn sollte, so müste 0^2 unendlichemahl kleiner als o seyn, und keine Ungereimtheit fällt deutlicher, als diese in die Augen. (33. §.) Die wahre Beschaffenheit der Sache ist diese. Weil ein Bruch wie $\frac{ax^2 + bx}{fx^2}$ allemahl = $\frac{a + b:x}{f}$ bleibt, was man auch der Grösse x für einen

Werth beylegen will; so muß $\frac{ax^2+bx}{fx^2} = \frac{a}{f}$ werden, und der zweyte Theil des Zählers muß wegfallen, wenn $x = \infty$ werden soll. Der Grund davon ist nicht der, weil in eben dem Fall x^2 unendlichemahl grösser als x wird, und eben darum x gegen x^2 verschwindet, sondern weil $b:x$ nun für sich schon nichts anders als o ist. Ueberhaupt ist $\frac{ax^{m+n}+bx^m}{fx^{m+n}} = \frac{a+b:x^n}{f}$, und wenn m und n positive Zahlen sind, so wird dieser Bruch $= \frac{a}{f}$ für $x = \infty$. Wer nun im Rechnen schon geübt ist, der kann bx^m im Zähler gleich weglassen. Auch wenn mehr dergleichen Produkte aus beständigen Coefficienten in Potenzen von x mit positiven Exponenten im Zähler folgen, die kleiner als $m+n$ sind; so kann man sie alle gleich weglassen, und der gesuchte Werth für $x = \infty$ wird doch richtig gefunden. Nur das und nichts mehr will die Regel sagen:

> Das Unendlichgrosse einer niedern Ordnung verschwinde in Vergleichung mit dem Unendlichgrossen einer höhern Ordnung.

Uebrigens ist die Regel selbst eben so unnütz als die ähnliche Regel für das Unendlichkleine im 33. §, auch eben so schädlich, weil sie zu falschen und unrichtigen Vorstellungen Anlaß giebt.

39. §.

Bey dem allen hat man doch nach den bisher von mir beurtheilten Regeln eben darum immer ganz richtig gerechnet, weil sie an sich nichts anders sind, als die allerleichtesten Regeln der Buchstabenrechnung: weil man sie aber in eine wunderliche Sprache einkleidete, so gab ih-

ihnen diese das Ansehen, als enthielten sie lauter Widersprüche. Man hat also die vielen wahren Theoreme der höhern Analysis keinesweges aus einer oder wohl gar mehrern widersprechenden Voraussetzungen, (wie die Königl. Preußische Academie vorauszusetzen scheint) man hat sie vielmehr aus den bekanntesten klärsten sichersten und wahrhaft mathematischen Grundsätzen gefolgert: man hat nur darin gefehlt, daß man eine höchst ungeschickte Sprache redete. Den ersten Erfindern muß man es so hoch nicht anrechnen, daß sie nicht gleich anfangs auf die richtigste und natürlichste Einkleidung bey dem Vortrage ihrer Erfindungen verfallen sind: es ist aber auch gar kein überwiegender Grund vorhanden, weßwegen wir diesen Sprachgebrauch beybehalten müsten. Wir haben ja in vielen Stücken zum Vortheil der Wissenschaft die Zeichen und die Sprache der alten Cossisten geändert, was kann uns denn nöthigen, einen Redegebrauch beyzubehalten, welcher den Sachen, die dadurch bezeichnet werden sollen, gar nicht angemessen ist?

40. §.

Wenn man $\frac{1}{0} = \infty$ setzt, und mit diesem Ausdruck wie mit andern Gleichungen umgehet, so folgt daraus $1 = \infty.0$, und dieses Zeichen hat wiederum einen sehr richtigen den oben vorgetragenen Schlüssen gemässen Sinn. Man muß es nur nicht so übersetzen: unendlichemahl Nichts giebt ein endliches Ganzes. Das Zeichen bedeutet eben so viel, als wenn man schriebe $m. \frac{1}{m}$, welches allemahl $= 1$ ist, was auch m bedeuten soll. Die Null ist nur die letzte Gränze des Bruchs $\frac{1}{m}$: wenn man das für $\frac{1}{\infty}$ setzt, so siehet man gleich, daß $\infty.0 = \infty . \frac{1}{\infty}$

$\infty \cdot \frac{1}{\infty}$ nichts anders bedeute, als alle Theile des Ganzen zusammen, und wenn sie auch so klein wären, daß kein Bruch klein genug wäre jeden Theil für sich allein anzugeben, in welchem Fall man also die Menge der Theile auch nicht mehr zählen könnte. Wenn eine algebraische Formul das Gesetz ausdrückt, wie eine Grösse y von einer andern x abhängt; so hat sie bald die Form eines Bruchs, bald die Form eines Products: es kann aber jedesmahl die eine Form leicht in die andre verwandelt werden. Wäre $y = \frac{aa - xx}{a - x}$, so ist auch $y = \frac{1}{a - x}$. $(aa - x.x)$, und in dem Fall $x = a$ giebt die erste Form $y = \frac{0}{0}$, die andre aber $\infty . 0$. Weil übrigens auch $\frac{1}{a - x} . (aa - xx) = \frac{1}{a - x} : \frac{1}{aa - xx}$ gesetzt werden kann, so wird in eben dem Fall $x = a$ zugleich $y = \frac{\infty}{\infty}$. Wer sonst mit algebraischen Formuln umzugehen weiß, der siehet gleich, daß $aa - xx$ mit $a - x$ dividirt $a + x$ giebt, also ist für sich schon klar, daß $\frac{aa - xx}{a - x}$ allemahl $= a + x$ bleibe, was auch x bezeichnen mag: mithin muß 2a daraus werden, wenn man $x = a$ setzt. Wäre das nicht so leicht zu übersehen, so könnte man $a - x = z$ setzen, das würde $x = a - z$, also $\frac{aa - xx}{a - x} = \frac{2az - zz}{z} = 2a - z$ geben, woraus 2a wird, wenn $z = 0$ also $x = a$ ist.

41. §.

41. §.

Der wahre Grund, weßwegen algebraïsche Formuln sich zuweilen in Brüche wie $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, oder Producte wie $\infty . 0$ verwandeln, ist also der, weil der Werth, welchen man in besondern Fällen sucht, zwar unter der allgemeinen Formul mit begriffen ist, aber nicht bestimmt angezeigt werden kann, wofern man ihr nicht eine andre Form giebt. Das Product $(1 - x)$ tg. $\frac{1}{2}\pi x$ wird $=$ $0 . \infty$, wenn $x = 1$ ist. Es ist aber tg. $\frac{1}{2}\pi x = \frac{\text{sin. } \frac{1}{2}\pi x}{\text{cos. } \frac{1}{2}\pi x}$, und wenn man $1 - x = z$ setzt, so wird $x = 1 - z$, also eben dasselbe Product $= \frac{a \text{ sin. } (\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi z)}{\text{cos. } (\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi z)}$. Ferner ist sin $(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi z) = \text{cos. } \frac{1}{2}\pi z$, und cos. $(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi z) = \text{sin. } \frac{1}{2}\pi z$, also auch $(1 - x)$ tg. $\frac{1}{2}\pi x = \frac{z \text{ cos. } \frac{1}{2}\pi z}{\text{sin. } \frac{1}{2}\pi z} = \frac{\frac{1}{2}\pi z \text{ cos. } \frac{1}{2}\pi z}{\frac{1}{2}\pi \text{ sin } \frac{1}{2}\pi z}$. Weil nun aus andern Gründen bekannt ist, daß $\frac{\frac{1}{2}\pi z}{\text{sin. } \frac{1}{2}\pi z} = 1$ werde, wenn $z = 0$ wird, da dann zugleich cos $\frac{1}{2}\pi z = 1$ ist; so erhellet, daß jenes Product $= \frac{2}{\pi}$ werde, wenn $z = 0$, also $x = 1$ gesetzt wird. Das Product $(1 - x)$ tg. $\frac{1}{2}\pi x$ ist auch $= \frac{1 - x}{\text{cot. } \frac{1}{2}\pi x}$ und daraus wird $\frac{0}{0}$, wenn $x = 1$ ist. Setzt man $z = 1 - x$, oder $x = 1 - z$, so erhält man $\frac{z}{\text{cot. } (\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi z)} = \frac{z}{\text{tg. } \frac{1}{2}\pi z} = \frac{\frac{1}{2}\pi z}{\frac{1}{2}\pi \text{ tg. } \frac{1}{2}\pi z}$.

Ferner weiß man, daß $\frac{\frac{1}{2}\pi z}{\text{tg. } \frac{1}{2}\pi z} = 1$ werde, wenn $z = 0$,

also $x = 1$ ist, also erhält man für eben den Fall den Werth $\frac{2}{\pi}$ wie vorhin. Auf eben diesen Gründen beruhet auch die bekannte Bernoullische Regel, wie man die Werthe solcher Functionen suchen kann, die für gewisse Werthe der veränderlichen Grösse, wovon sie abhängen, unbestimmt scheinen. (Anfangsgr. der Math. Anal. und höhern Geom. X. Abschnitt).

42. §.

Wenn a und b incommensurable Grössen sind, also daß Verhältniß a : b irrational ist; so kann nie $\frac{1}{n}$ a $=$ $\frac{1}{m}$ b werden, was man auch für ganze Zahlen anstatt n und m setzen mag. Wenn aber diese Zahlen so von einander abhängen sollen, daß allemahl $a = \frac{n}{m} b + r$ und $r < \frac{1}{m} b$ bleibt, so hat man $\frac{a}{b} = \frac{n}{m} + \frac{r}{b}$, und $\frac{r}{b} < \frac{1}{m}$, mithin ist $\frac{a}{b}$ die Gränze des Verhältnisses $\frac{n}{m}$, weil die Voraussetzung $m = \infty$ auch $\frac{r}{b} = 0$ giebt. Man kann demnach so reden, als wenn incommensurable Grössen ein unendlichkleines gemeines Maaß hätten, und der Exponent eines Irrational-Verhältnisses ein Bruch mit einem unendlich grossen Zähler und Nenner wäre: allein das ist wiederum kein Beweis dessen, daß es wirklich unendlich grosse Zahlen gebe, die

gen einander ein endliches Verhältniß haben. Es beweiset vielmehr, daß es gar keine Zahlen giebt, die sich wie a zu b verhalten. Ich habe im 1sten Theil meines mathematischen Lehrbegriffes im VI. Absch. der Geom. 151 200 §. und im 1sten Theil der Anfangsgründe 164. 165. §. der Rech. und 161. u. f. §§. der Geometrie die hieher gehörigen Lehren so vorgetragen, daß es gar nicht nöthig war, von jenen Vorstellungsarten Gebrauch zu machen.

Von Gebrauch der Gränzen der Verhältnisse und Summen anstatt der Methode des Unendlichen in der Geometrie.

43. §.

Der häufige Gebrauch der vom Unendlichkleinen hergenommenen Redensarten in der algebraischen Sprache hat noch eine andre anstößige Sprache beym Vortrage der Geometrie zur Folge gehabt. Krumme linien betrachtet man, als wären es aus unendlich vielen unendlich kleinen gradlinichten Theilen nach Art gradlinichter Polygone zusammen gesetzte gebrochene linien. Unendlichkleine Bogen sind nach diesem Sprachgebrauch mit ihren Sehnen einerley, die gradlinichte Tangente hat mit dem Bogen, welchen sie berührt, einen unendlichkleinen Theil gemein, sie schneidet den Bogen in zweyen einander unendlich nahe liegenden Puncten. Ein andermahl bestehet die krumme linie wieder aus unendlich vielen unendlich kleinen Cirkelbogen. Die Fläche zwischen zweyen parallelen Ordinaten, dem dazwischen liegenden Bogen und der dazu gehörigen Abscisse bestehet aus unendlich vielen unendlich schmahlen Trapezien, und jedes davon ist auch mit einem unendlich kleinen Parallelogramm einerley, wenn gleich beide um einen unendlich kleinen Triangel verschieden sind: denn dieser ist unendlichemahl kleiner als das dazu gehörige unendlich kleine Parallelogramm. Mit krum-

krummen Flächen und den Körpern, die davon begränzt werden, geht man eben so um. Die Flächen runder Körper bestehen aus unendlich schmahlen Zonen, die für conische Flächen angenommen werden, die Körper selbst aus unendlich niedrigen Schichten zwischen parallelen einander unendlich nahe liegenden Ebenen, die man für Cylinder gelten lässet. Die unendlich kleinen Zonen theilt man auch, wenn man es gut findet, wieder in unendlichemahl kleinere Parallelogramme oder Rechtecke, die unendlichkleinen Cylinder, auch überhaupt unendlich niedrige Schichten der geometrischen Körper, wenn gleich die Schnitte mit den unendlich nahe liegenden Ebenen keine Kreise sondern andre krumme Linien sind, theilt man aufs neue in unendlichemahl kleinere prismatische Körper, und auch diese wiederum in unendlichemahl kleinere Parallelepipeda, wovon alle Seitenlinien unendlich klein sind.

44. §.

Man ist einig darüber, daß alle diese Redensarten nichts anders als Abkürzungen sind, und daß man sie nicht in dem Sinne nehmen müsse, den die Worte unmittelbar anzuzeigen scheinen; allein man sollte auch in solchen Lehrbüchern, die zum ersten Unterricht für angehende Mathematiker bestimmt sind, das Leibnitzische explicatione rigidantur nicht vergessen. Eigentlich sind diese Redensarten nichts anders als Uebersetzungen algebraischer Zeichen in eine Wörtersprache, die der Erfinder, wenn ihm das System der Wissenschaft selbst schon bekannt ist, als Abkürzungen brauchen kann: er kann so rechnen, als wenn sich das alles so verhielte wie es dem Wortverstande nach lautet, denn er weiß aus andern Gründen, daß er auf eben die Resultate der Rechnung kommen würde, wenn er auch ein andres einem jeden nach nicht so geübten völlig einleuchtendes Verfahren anwendete. Wenn ich davon umständliche Beweise geben wollte, so müste ich hier bey-

beynahe die ganze Wissenschaft vortragen: anstatt dessen kann ich mich auf mehrere meiner längst bekannt gewesenen Schriften beziehen, und es wird genug seyn, wenn ich zur Probe nur aus dem 2ten Theil meines mathematischen Lehrbegriffes den 466. §. Geom. und aus dem 4ten Theil den 107. 108. 114. §. der Mechanik anführe. Wer das Ganze der Wissenschaft in ihrer unverstellten Einkleidung kennen lernen will, der wird, wie ich hoffe, nicht allein in meiner längst bekannt gewesenen Matheſi Theoretica, sondern auch nun in meinen neugedruckten Anfangsgründen der Analysis und höhern Geometrie alle Befriedigung finden. Bey Verfassung dieses neuern Buches habe ich mir noch weniger Bedenken gemacht, die Ausdrücke vom Unendlichkleinen ganz zu vermeiden, als vormals, da ich das lateinische Werk aufsetzte. Mir schien es nicht rathsam zu seyn, auf einmahl ganz von dem so sehr allgemein eingeführten Sprachgebrauch abzugehen: ich glaubte es sey nöthig, angehende Mathematiker mit diesem Sprachgebrauch bekannt zu machen, damit ihnen der Vortrag andrer Schriftsteller nicht zu fremde scheinen mögte. Nun dient die gegenwärtige Abhandlung dazu, und eben darum war es nicht weiter nöthig, in dem neuern Handbuche eine Sprache zu reden, die ich gern aus allen Lehrbüchern längst weggewünscht hätte.

45. §.

Einige wenige Bemerkungen, die den Vortrag der Elementargeometrie betreffen, muß ich doch beyfügen: sie werden mir durch den Wunsch abgedrungen, daß deutscher Fleiß und deutsche Gründlichkeit wenigstens in den Schriften der Mathematiker sich mehr als in so vielen andern Schriften auszeichnen möge. Es fehlt gewiß nicht, daß der Schriftsteller, wenn er das Unendlichkleine in seinen Beweisen anbringt, nicht selbst fühlen sollte, wie sehr sich der gesunde Menschenverstand gegen die gewöhnlichen

Vorstellungen davon auflehnet: wenn man nun der Sache wieder helfen will, so setzt man hinzu, das Unendlichkleine sey nichts anders, als das quantum omni dabili minus der alten Geometer, und hiemit soll sich nun der Anfänger befriedigen. Einmahl ist es schon sonderbar genug, wenn man vom Anfänger verlangt, daß derselbe dieser Versicherung auf guten Glauben trauen soll: sonst will man ihn doch eben durch die Geometrie gewöhnen, keiner Behauptung auf das bloße Ansehen des Lehrers zu trauen, wenn sie nicht bewiesen wird. Oder soll nun der Anfänger gleich die Schriften eines Archimedes und andrer Alten selbst zur Hand nehmen, um sich daraus weiter zu belehren? Fürs zweyte zieht das eine andre Unbequemlichkeit für Lehrer nach sich, die ein solches Handbuch beym mündlichen Vortrage erklären wollen. Mancher Lehrer besonders auf Schulen, wo man doch auch Elementargeometrie vorträgt, hat vielleicht selbst keine Zeile im Archimedes oder andern alten Schriftstellern gelesen: er trägt also auch selbst jene Behauptung als ungezweifelt richtig auf das blosse Ansehen seines Autors vor. So pflanzt sich die gewiß nicht ganz richtige Behauptung, als wäre es ausgemachte Wahrheit, immer weiter fort: denn selten ist wohl unter den Eleven ein fähiger Kopf, der sich den Archimedes zu verschaffen weiß, um ihn nachzuschlagen und mit eigenen Augen zu sehen.

46. §.

Was so oft gesagt wird, und nie so bewiesen ist, wie man es sagt, das Unendlichkleine sey mit dem einerley, was die Alten omni dabili minus nennen, und die Methode des Unendlichen mit der Exhaustionsmethode der Alten, das ist schlechterdings nicht ganz richtig; nur so viel ist richtig, daß die Schlüsse, welche die Neuern auf ihre Vorstellungsarten vom Unendlichkleinen gründen, wenn man sie gehörig auseinander setzt, auf die

Exhaustionsmethode der Alten zurück geführet werden können. Einmahl haben die Alten in ihren Beweisen kein omni *dabili* minus, sondern ein quovis *dato* minus, und das ist kein infinite parvum, es ist allemahl noch finitum. Fürs zweyte sind bey Ihnen die Polygone, welche sie an der hohlen oder erhabenen Seite krummer linien beschreiben, mit den krummen linien selbst nicht einerley, sondern allemahl davon verschieden; ihre gradlinichten Figuren, die sie entweder ganz innerhalb des Raums krummlinichter Flächen, oder auch so beschreiben, das Ecken davon ausserhalb des Raums der krummlinichten Fläche fallen, sind nie mit der krummlinichten Fläche einerley, sie sind im ersten Fall kleiner, im andern Fall grösser; die Differenz ist nicht unendlich klein, oder quovis *dabili* minor, sie ist immer endlich und nur quantitate *data* minor. Das bekannte Beyspiel vom Kreise, woraus Archimedes schon ein reguläres Polygon von unendlich vielen unendlichkleinen Seiten gemacht haben soll, wird den Unterscheid beyder Methoden deutlich genug ins Licht setzen.

47. §.

Lehrsatz. Der Kreis ist einem Dreyeck gleich, wovon die Grundlinie so lang als die Peripherie, die Höhe so groß, als der Halbmesser des Kreises ist.

Erste Beweisart. Im Kreise oder auch um den Kreis sey ein reguläres Polygon beschrieben, so ist Fläche und Peripherie des Polygons im ersten Fall kleiner, im zweyten Fall grösser, als Fläche und Peripherie des Kreises. Man verdoppele die Seiten des Polygons, so ist die Differenz der Kreisfläche von der Polygonfläche, und der Cirkelperipherie von der Polygonperipherie, kleiner als die Hälfte der Differenz, um welche der Kreis und seine Peripherie vom Polygon und dessen Peripherie unterschieden waren, als letzteres die einfache Anzahl Seiten hatte.

Wenn also D die Differenz der Fläche oder der Peripherie des ersten Polygons von der Fläche oder der Peripherie des Kreises bezeichnet; so ist diese Differenz nach Verdoppelung der Seiten kleiner als $\frac{1}{2}$ D. (Manche Schriftsteller für Anfänger beweisen diese Sätze nicht einmahl so genau, sie lassen es dabey bewenden, der Augenschein lehre schon, daß die Differenz kleiner werde.) Man verdoppele die Seiten aufs neue, so wird die Differenz der Flächen oder Peripherien kleiner als $\frac{1}{4}$ D: wenn also diese Verdoppelung der Seiten ohne Ende fortgesetzt wird, so wird jene Differenz kleiner als jede Grösse, die sich angeben läßt, sie wird omni *dabili* minor, das heißt unendlich klein. Die Zahl der Seiten wird nun unendlich groß, also ist der Kreis, oder wenn man es gelinder ausdrücken will, also kann man den Kreis als ein reguläres Polygon betrachten, das unendlich viele unendlichkleine Seiten hat, dessen Seiten sich also in der Peripherie verlieren, da dann ihre Entfernung vom Mittelpunct, auch wenn es ein inneres Polygon war, dem Halbmesser gleich wird. Nun ist die Polygonfläche einem Dreyeck gleich, dessen Grundlinie der Peripherie, und dessen Höhe der Entfernung der Seiten vom Mittelpunct gleich ist: also muß eben dasselbe von der Kreisfläche wahr seyn.

Zweyte Beweisart. 1. Das Dreyeck T sey kleiner als der Kreis C, so läßt sich eine Differenz D angeben, um welche es vom Kreise verschieden ist. Im Kreise verzeichne man ein reguläres Polygon P, welches vom Kreise auch um eine Differenz E unterschieden seyn wird, da dann $C = P + E = T + D$ seyn muß. Diesem Polygon gebe man aber so viele Seiten, daß $E < D$ ausfällt, so wird $P > T$ seyn. Aber des Polygons Peripherie ist kleiner als die Cirkelperipherie, die der Grundlinie des Dreyeckes T gleich ist, (hyporh.) und die Distanz der Seiten des Polygons vom Mittelpunct ist kleiner als des Kreises Halbmesser, der so groß, als des Dreyecks T Höhe ist: (hy-

(hypoth.) daraus folgt, daß auch $P < T$ sey, da doch $P > T$ seyn sollte, und beydes streitet mit einander.

2. Das Dreyeck T sey gröſſer als der Kreis C, so läßt sich wiederum eine Differenz D angeben, um welche es den Kreis übertrift, da dann das Dreyeck $T = C + D$ seyn muß. Nun verzeichne man um den Kreis ein reguläres Polygon P, welches den Kreis ebenfalls um eine Differenz E übertrift, so daß $P = C + E$ ist. Dem Poligon gebe man so viele Seiten daß $E < D$ werde, so ist $C + E < C + D$, folglich $P < T$. Aber des Polygons Peripherie ist gröſſer, als die Cirkelperipherie, also gröſſer, als des Dreyecks T Grundlinie, die der Cirkelperipherie gleich ist: (hypoth.) und die Distanz der Seiten vom Mittelpunct ist dem Halbmesser des Kreises also auch der Höhe des Dreyeckes T gleich. (hypoth.) Daraus folgt, daß $P > T$ sey, da doch $P < T$ seyn sollte, und das eine widerspricht dem andern. Demnach ist weder $T < C$, (num. 1.) noch $T > C$, (num. 2.) folglich $T = C$.

48. §.

Welche Beweisart giebt der Sache mehr Licht? welche von beyden erzwingt den Beyfall, oder bewirkt die vollkommenste Ueberzeugung? Wo ist in der zweyten Beweisart das Unendlichkleine der Neuern zu finden? Das D ist es gewiß nicht, denn das soll eine Differenz seyn, die sich angeben läßt. Auch das E ist es nicht, denn es wird nur verlangt, daß $E < D$ ausfallen müsse. Ueberdem soll im ersten Fall $P + E = C$ bleiben, und es wird so wenig $P = C$ gesetzt, daß vielmehr die ganze Schärfe des Beweises sich auf den Umstand gründet, es bleibe die Peripherie von P kleiner als die Cirkelperipherie, und der kleinste Halbmesser kleiner, als des Kreises Halbmesser: alles grade das Gegentheil dessen, was die erste Beweisart voraussetzt. Im zweyten Fall soll $P = C + E$

bleiben, und es wird wiederum so wenig $P = C$ gesetzt, daß vielmehr die Schärfe des Beweises sich grade auf den Umstand gründet, es bleibe $P > C$, und die Peripherie von $P >$ als die Cirkelperipherie.

49. §.

Noch mehr: ist denn die zweyte Beweisart so sehr viel weitläuftiger als die erste? Ist es wohl ein gültiger Grund, wenn man die Vorstellungsarten vom Unendlichkleinen in der Elementargeometrie damit entschuldiget, man müsse sie gebrauchen, um die Beweise der Alten abzukürzen? Ein Lehrer, der beym mündlichen Vortrage die erste Beweisart recht auseinander setzen, und alles in seinem rechten Lichte zeigen will, ist gewiß genöthiget, mehr Zeit mit Erläuterungen und Entschuldigungen des Sprachgebrauchs zu verlieren, als wenn er grade zu ohne alle Umstände den Beweis nach dem Archimedes vortrüge. Jene erste Beweisart giebt sogar zu der irrigen Vorstellung Anlaß, der Archimedische Lehrsatz sey nur beynahe wahr: ich erinnere mich mit völliger Gewißheit dergleichen Aeusserungen in Druckschriften gelesen zu haben. Ja ich kann noch hinzusetzen, daß ich grade zu der Zeit, da ich mit der Ausarbeitung dieser Abhandlung beschäftiget war, von einem meiner Freunde, der uns hier als ein sehr geschickter Schüler einer unsrer berühmtesten deutschen Lehrer der Mathematik bekannt ist, eben dieselbe mündliche Aesserung gehört habe: die Veranlassung zu der Unterredung gab eben die Preisaufgabe der Königl. Preuß. Academie. Es befremdete mich ungemein, diese Aeusserung zu hören, da ich gewiß wuste, daß sie von einem Manne herrührte, dem ich mehr als mittelmässige mathematische Kenntnisse zutrauen konnte. Er stützte sich auf den gemeinen Beweis, und schloß, der Triangel, welcher dem Polygon mit unendlich vielen unendlich kleinen Seiten gleich sey, könne ja nie dem Kreise gleich seyn, weil

weil ihm das Polygon nie gleich werden könne: also sey auch der archimedische Lehrsatz nur beynahe wahr. Das erste ist richtig, aber die Folge falsch, denn der dem Polygon gleiche Triangel ist der archimedische Triangel nicht. Der archimedische Triangel ist grösser als jedes innere, und kleiner als jedes äussere Polygon, und eben darum ist er dem Kreise gleich. Ein Polygon mag noch so viele Seiten haben, so ist es allerdings nur beynahe dem Kreise gleich, aber der archimedische Triangel ist ihm in aller Schärfe gleich.

50. §.

Allemahl bleibt die Erhaustionsmethode der Alten eine vortrefliche Uebung in Anwendung der Regeln der Vernunftlehre, und das ist ein neuer Grund, weßwegen man es nicht verabsäumen müste, Anfänger beym Vortrage der Elementargeometrie damit bekannt zu machen. Glaubt man, daß das einförmige des Vortrages, wenn man den Beweisen die apogogische Form nach Art der Alten lassen wollte, ermüden werde, so kann man auf mehr als eine Art damit abwechseln, daß man ihnen zuweilen die Form directer Beweise giebt, wie ich davon sowohl in meinen Anfangsgründen der mathematischen Wissenschaften, als auch im Auszuge aus den Anfangsgründen und dem Lehrbegriffe beym Vortrage der Lehre vom Kreise, auch von der Kugel und ihrer Oberfläche mehrere Proben gegeben habe. Die Beweise, welche Archimedes in seinen Büchern de Sphaera et Cylindro führt, sind zwar ziemlich umständlich, und eben darum scheint es, daß beym Vortrage dieser Lehren in der körperlichen Geometrie die Abkürzung vermittelst der Methode des Unendlichen noch nöthiger sey, als die Abkürzung der Lehren vom Kreise in der Elementargeometrie. Allein man kann den Vortrag sehr verkürzen, ohne daß es nöthig wäre, das Unendlichkleine mit zu Hülfe zu nehmen. Ich will zur

Probe aus meinen Mathematischen Anfangsgründen nur den 195. 213. 343. 348. 372. 380. 383. 393. §. der Geometrie anführen, womit man im Auszuge aus dem Lehrbegriffe und den Anfangsgründen den 193. 219. 359. §. Geom. vergleichen kann. Es ist nicht nöthig, daß man die Beweise der Alten in ihrer ganzen weitläuftigen Form abschreibe, genug wenn nur der Geist der Alten in den Beweisen zu finden ist, das Bindende und völlig Einleuchtende, welches die vollkommenste Ueberzeugung bewirket. Man verspricht dem Anfänger, daß die Uebungen in der Geometrie ihn vorzüglich zum scharfsinnigen und tiefsinnigen Nachdenken aufgelegt machen werden: also lasse man auch die schönsten Methoden der Alten nicht weg, welche diesen Erfolg vorzüglich bewirken können. Sobald als von der höhern Geometrie die Rede ist, sobald gebe ich meine völlige Zustimmung, daß man allerdings überwiegende Gründe habe, den Vortrag abzukürzen: das kann man auch, ohne im allergeringsten von der geometrischen Strenge abzuweichen, und man bedarf der vermeinten Hülfe von den gewöhnlichen Vorstellungen des Unendlichkleinen ganz und gar nicht. Wer sich vermittelst der nöthigen Uebungen in der Elementargeometrie mit der Exhaustionsmethode der Alten bekannt gemacht hat, der ist aufs vollkommenste dazu vorbereitet, sich eine richtige wahrhaft geometrische Vorstellung davon zu machen, was Gränze eines Verhältnisses, Gränze einer Summe sey, oder überhaupt Gränze der möglichen Werthe einer veränderlichen Grösse. Ich werde dieses durch einige aus der Elementargeometrie hergenommene Proben zu erläutern suchen.

51. §.

Es sey Π die Peripherie, r der Halbmesser des Kreises, und n eine ganze Zahl, also $\frac{I}{n}\Pi$ ein Bogen, dessen

sen

sen Sehne, die ich kurz auf die nachstehende Art chord. $\frac{1}{n}\Pi$ bezeichne, zugleich die Seite eines im Kreise beschriebenen regulären Polygons ist. Die Peripherie dieses innern regulären Polygons sey p, so ist $p = n.\,\text{chord.}\frac{1}{n}\Pi$. Ferner sey ϱ der kleinste Halbmesser dieses regulären Polygons, und die Peripherie des ähnlichen äussern um den Kreis beschriebenen regulären Polygons $= P$, so ist $\frac{P}{p} = \frac{r}{\varrho}$, und $\varrho = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}(\text{chord.}\frac{1}{n}\Pi)^2)}$ $= r\sqrt{(1 - \frac{\frac{1}{4}(\text{chord.}\frac{1}{n}\Pi)^2)}{rr}})$, mithin $\frac{P}{p} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{1}{4}(\text{chord.}\frac{1}{n}\Pi)^2 : rr)}}$. Aber allemahl ist $\Pi < P$, also $\frac{\Pi}{P} < \frac{P}{P}$; zugleich aber ist auch $\Pi > p$, also $\frac{\Pi}{P} > 1$, das n mag unter den ganzen Zahlen welche man will bezeichnen. Das heißt algebraisch ausgedrückt, es sey allemahl $\frac{\Pi}{n.\,\text{chord.}\frac{1}{n}\Pi} < \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{1}{4}(\text{chord.}\frac{1}{n}\Pi)^2 : rr)}}$, aber zugleich $\frac{\Pi}{n.\,\text{chord.}\frac{1}{n}\Pi} > 1$, die Zahl n mag so groß angenommen werden, als man will: also kann $\frac{\Pi}{n.\,\text{chord.}\frac{1}{n}\Pi}$ nie kleiner als 1 werden. Bey dem allen aber kann doch $\frac{P}{P}$, also noch um so mehr $\frac{\Pi}{P}$, oder $\frac{\Pi}{n.\,\text{chord.}\frac{1}{n}\Pi}$, klei-

ner werden, als jede Zahl die 1 übertrift: (Lehrbegr. der Math. 1. Th. 222. §. mit dem beygefügten Zusatz. 360. S. Anfangsgr der Math. Wiss. 1. B 192. §. Geom. 499. S. Auszug 1. B. 187. §. Geom. 115 — 117. S.) also ist 1 die Gränze aller möglichen Werthe des Bruchs $\frac{\Pi}{n.\ \text{chord}\ \frac{1}{n}\Pi}$. Stellet man sich n als eine beständig wachsende Zahl vor, so kann $\frac{\Pi}{n.\ \text{chord.}\ \frac{1}{n}\Pi}$ der Gränze 1 so nahe kommen als man will. Um diese Gränze zu bezeichnen, schreibt man ∞ anstatt n und setzt $\frac{\Pi}{\infty\ \text{chord}\ \frac{1}{\infty}\Pi} = 1$. Man will nun nicht mehr so etwas bezeichnen, das sich der Gränze 1 noch nähert, man will vielmehr diese Gränze selbst bezeichnen, und diese Gränze ist mit 1 vollkommen einerley.

52. §.

Soweit ist alles ganz richtige algebraische Zeichensprache: aber man muß nicht weiter schliessen, also ist $\Pi = \infty . \text{chord}\ \frac{1}{\infty}\Pi$, und das nun in die gewöhnliche Sprache so übersetzen: die Peripherie des Kreises sey der Peripherie eines regulären Polygons gleich, das unendlich viele unendlich kleine Seiten hat. Das ist eben so ungereimt, als wenn man das Zeichen ∞.0 (40. §.) so übersetzen wollte: unendlichemahl Nichts sey jedem endlichen Ganzen gleich. Die wahre und richtige Vorstellung von der Sache ist keine andre als diese. Der Bruch $\frac{\Pi}{P}$ hat einen unveränderlichen Zähler und einen veränderlichen Nenner. Dieser Nenner ist immer kleiner als der Zäh-

Zähler, also immer $\frac{\Pi}{p} > 1$. Aber p wird gröſſer wenn n gröſſer wird jedoch nach diesem Gesetze, daß p nie $= \Pi$ werden kann, so lange p eine innere Polygon-Peripherie bleibt: also kommt $\frac{\Pi}{p}$ der 1 näher wenn p mit n gröſſer wird, aber die Gränze, welche p nicht übertreffen kann, ist Π: setzt man nun anstatt p im Nenner die Gränze von p, die nichts anders als Π selbst ist, so wird natürlicherweise $\frac{\Pi}{\Pi} = 1$. Will man also das Zeichen ∞. chord. $\frac{1}{\infty}\Pi$ brauchen, so ist es mit Π ein vollkommen gleichgültiges Zeichen, so wie $\frac{1}{\infty}$ ein vollkommen gleichgültiges Zeichen mit o ist.

53. §.

Es bleibt allemahl $\frac{\Pi}{\text{n. chord. } \frac{1}{n}\Pi} = \frac{\frac{1}{n}\Pi}{\text{chord. } \frac{1}{n}\Pi}$, also ist auch des veränderlichen Quotienten $\frac{\frac{1}{n}\Pi}{\text{chord } \frac{1}{n}\Pi}$ Gränze $= 1$. Will man daraus schliessen, also sey $\frac{1}{\infty}\Pi = \text{chord } \frac{1}{\infty}\Pi$, und das so übersetzen, der unendlichkleine Bogen $\frac{1}{\infty}\Pi$ sey seiner Sehne gleich, so ist das weiter nichts als ein modus loquendi wie Leibnitz sagt: es ist aber schlechterdings kein überwiegender Grund vorhanden, so zu reden. Wenn gleich der geübte Geo-

meter und Analyst sehr wohl weiß, daß es hier nicht auf den Ausdruck sondern nur auf die Sache ankomme, weil der so eingekleidete Satz nichts als Rechnungsregel, keinesweges aber geometrischer Lehrsatz ist; so stößt sich doch gewiß der Anfänger daran, und weiß nicht, was er daraus machen soll. Die kurze Zeichensprache ist ein Eigenthum der Algebra: darum lasse man ihr dieses Eigenthum, und trage es nicht in die Geometrie über. Diese letztere Wissenschaft ist reich genug an eigenthümlichen Grundsätzen, und bedarf keiner solchen vermeinten Bereicherung. Der Algebraist kann dagegen mit Hülfe solcher Zeichen, wenn er die Sache nicht aus den Augen verliert, ganz richtige vollkommen scharfe Beweise führen: eine Probe davon mag der Beweis des archimedischen Lehrsatzes im 47. §. geben.

54. §.

Die Fläche des Kreises sey = C, die Fläche des innern regulären Polygons = q, die Fläche des ähnlichen äussern = Q: so ist $q = \frac{1}{2} n \varrho \text{ chord.} \frac{1}{n}\Pi$, und $Q = \frac{rr}{\varrho\varrho}.\frac{1}{2}n.\varrho \text{ chord.} \frac{1}{n}\Pi$ oder $Q = \frac{1}{2}.\frac{r}{\varrho}.rn \text{ chord.} \frac{1}{n}\Pi$.

Ferner ist $\frac{C}{q} < \frac{Q}{q}$, und man kann die Zahl n so groß annehmen, daß $\frac{Q}{q}$ also auch $\frac{C}{q}$ kleiner wird, als jede Zahl, welche 1 übertrift: (Anfangsgründe der Math. Wiss. 1 B. 212. §. Geom. 315. S. Auszug. 1 B. 213. §. Geom. 126. S.) dagegen kann nie $\frac{C}{q} < 1$ werden.

Diesemnach ist des Verhältnisses oder des Bruchs $\frac{C}{q}$

Grän-

Gränze $= 1$, also muß die Gränze des Products $\frac{C.\Pi}{q} = \Pi$ seyn. Es war aber $q = \frac{1}{2} n$ $(\varrho : r)\, r\, \text{chord.}\, \frac{1}{n}\Pi$, also ist die Gränze des Products

$$\frac{C.\Pi}{\frac{1}{2} n\, (\varrho : r)\, r\, \text{chord.}\, \frac{1}{n}\Pi} = \Pi,$$ die Gränze des Bruchs

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}(\text{chord.}\, \frac{1}{n}\Pi)^2)}}{r}$$ ist ebenfalls $= 1$:

also wird $\frac{C.\Pi}{\frac{1}{2} r.\, \infty\, \text{chord.}\, \frac{1}{\infty}\Pi} = \Pi$. Ueberdem ist auch

$$\frac{\Pi}{\infty.\, \text{chord.}\, \frac{1}{\infty}\Pi} = 1,$$ (52. §.) also erhält man

$\frac{C}{\frac{1}{2} r} = \Pi$, und daraus folgt $C = \frac{1}{2}\Pi.r$.

Das ist Uebersetzung der Archimedischen Beweisart des Satzes im 47. §. in die algebraische Zeichensprache, alle Schlüsse sind völlig geometrisch richtig. Mit dieser Zeichensprache aber muß man innerhalb der Gränzen algebraischer Rechnungen bleiben, man muß sie nicht aufs neue wieder in die gewöhnliche Wörtersprache übersetzen, und so reden, als wenn die Zeichen ∞, 0, oder $\frac{1}{\infty}\Pi$, chord. $\frac{1}{\infty}\Pi$, etwas ausdrückten, womit man noch eben so, wie mit a und b, x und y umgehen könnte, wenn diese Buchstaben endliche Grössen bedeuten.

55. §.

Es ist übrigens nicht allein die Gränze des veränderlichen Quotienten $\frac{\Pi}{n.\,\text{chord.}\,\frac{1}{n}\Pi} = 1$, sondern man kann anstatt Π auch jeden andern Kreisbogen seßen: wenn A einen solchen Kreisbogen bezeichnet, so ist die Gränze des veränderlichen Quotienten $\frac{A}{n.\,\text{chord.}\,\frac{1}{n}A} = 1$.

Beweis. Das Verhältniß des Bogens A gegen Π sey rational oder irrational, allemahl kann man $\frac{A}{\Pi} = \frac{m}{n} + \frac{R}{\Pi}$ seßen, da dann im ersten Fall m und n so genommen werden können, daß $R = 0$ wird. Im zweyten Fall aber bezeichnet $\frac{R}{\Pi}$ den irrationalen Theil des Exponenten $\frac{A}{\Pi}$, und der Zähler m muß vom Nenner n so abhängen, daß $\frac{R}{\Pi} < \frac{1}{n}$, also $\frac{nR}{\Pi} < 1$ bleibt. (Lehrbegr. I. Th. 175. §. Geom. 319. S. Anfangsgr. 157-161. §. Rechenk. 186-191. S. Auszug 159. §. Geom. 103. S.)

Nun ist allemahl $\frac{\frac{m}{n}\Pi}{m.\,\text{chord.}\,\frac{1}{n}\Pi} = \frac{\frac{1}{n}\Pi}{\text{chord.}\,\frac{1}{n}\Pi}$, und dieses Quotienten Gränze ist $= 1$. (53. §.) Ueberdem ist $\Pi = A : (\frac{m}{n} + \frac{R}{\Pi})$, also $\frac{1}{n}\Pi = \frac{1}{n}A : (\frac{m}{n} + \frac{R}{\Pi})$, mithin auch $\frac{1}{n}\Pi = A : (m + \frac{nR}{\Pi}) = \frac{A}{m+\mu}$, wenn

man $\frac{n R}{\Pi} = \mu$ setzt; und $\frac{\frac{m}{n}}{} \Pi = \frac{m}{m+\mu} A$. Wenn diese Werthe gebraucht werden, so erhält man:

$$\frac{\frac{m}{n}\Pi}{m \text{ chord. } \frac{1}{n}\Pi} = \frac{m A}{m+\mu} : \left(m \text{ chord. } \frac{A}{m+\mu}\right).$$ Die Gränze dieses Quotienten ist $=1$, und sie ergiebt sich, wenn man $\frac{1}{n} = 0$ setzt: alsdenn ist zugleich $\frac{R}{\Pi} = 0$, $\frac{1}{m} = 0$, $\frac{\mu}{m} = 0$, und es wird $\frac{A}{m \text{ chord. } \frac{1}{m} A} = 1$, welches gewöhnlich so ausgedrückt wird $\frac{A}{\infty \text{ chord. } \frac{1}{\infty} A} = 1$.

56. §.

Weil wiederum allemahl $\frac{A}{m \text{ chord } \frac{1}{m} A} = \frac{\frac{1}{m} A}{\text{chord. } \frac{1}{m} A}$ bleibt, so ist zugleich die Gränze des Quotienten $\frac{\frac{1}{m} A}{\text{chord. } \frac{1}{m} A} = 1$. Demnach ist allemahl die letzte Gränze des Verhältnisses eines Bogens zu seiner Sehne, wenn beyde zugleich abnehmen, das Verhältniß der Gleichheit. Weil ferner chord. $\frac{1}{m} A = 2 \sin. \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2} A$, so ist

$$\frac{\frac{1}{m} A}{\text{chord. } \frac{1}{m} A} = \frac{\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2} A}{\sin. \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2} A}.$$ Setzt man $\frac{1}{2} A = \alpha$, so folgt, daß auch die Gränze des Quotienten $\frac{\frac{1}{m} \alpha}{\sin. \frac{1}{m} \alpha} = 1$ sey.

sey. Weil überdem tang. $\alpha = \frac{\text{sin. } \alpha}{\text{cos. } \alpha}$, also auch tang. $\frac{1}{m}\alpha = \frac{\text{sin. } \frac{1}{m}\alpha}{\text{cos. } \frac{1}{m}\alpha}$, so ist $\frac{\frac{1}{m}\alpha}{\text{tang. } \frac{1}{m}A} = \frac{\frac{1}{m}\alpha}{\text{sin. } \frac{1}{m}\alpha}$, cos. $\frac{1}{m}\alpha$. Die Voraussetzung $\frac{1}{m} = 0$ giebt cos. $\frac{1}{m}\alpha = 1$, und eben darum zugleich die Gränze des Quotienten $\frac{\frac{1}{m}\alpha}{\text{tang. } \frac{1}{m}\alpha} = 1$. Wenn diese Schlüsse noch Zweifeln unterworfen sind, so ist es auch noch Zweifeln unterworfen, ob es richtig sey, wenn in der Gleichung $yy = rr - xx$ für den Kreis die Abscisse $x = 0$ gesetzt, und daraus die Folge $y = r$ hergeleitet wird.

57. §.

Ein Ausdruck wie n. chord. $\frac{1}{n}\Pi$ stellet die Peripherie eines regulären Polygons, und überhaupt m. chord. $\frac{1}{m}A$ eine regulär gebrochene Linie vor, wovon alle gradlinichte Theile gleich groß sind. Wegen des letztern Umstandes hat ein solcher Ausdruck die Form eines Products, an sich aber ist jedes Product auch nichts anders als eine Summe solcher summirten Grössen, die alle gleich groß sind: also ist auch m. chord. $\frac{1}{m}A$ eine Summe sovieler gleich grosser Sehnen, als die Zahl m angiebt, und A ist die Gränze dieser Summe. Wenn im 54. §. $q = \text{n. } \frac{1}{2}\varrho$ chord. $\frac{1}{n}\Pi = \text{n } \frac{1}{2}\frac{\varrho}{r}$ r chord. $\frac{1}{n}\Pi$ war, so ist auch dieses Product eine Summe so vieler gleichschenklichter gleich-

gleichgrosser Dreyecke, als die Zahl m angiebt, und $\frac{1}{2}$ r. Π oder die Kreisfläche selbst, ist die Gränze dieser Summe. Eine ganz ähnliche Bewandniß hat es mit allen Quadraturen und Rectificationen, vermittelst der Integration findet man die Gränze einer veränderlichen Summe. Die Fläche zwischen zweyen parallelen Ordinaten, der Abscisse und dem dazu gehörigen Bogen einer krummen Linie, bestehet nicht aus unendlich vielen unendlich schmahlen Parallelogrammen, sie ist die Gränze der Summe einer Reihe solcher Parallelogramme, wovon die Grundlinien gleichgrosse unbestimmte Theile der Abscisse sind. Wenn jeder von diesen unbestimmten gleichen Theilen der Abscisse dx heißt, wenn y und $y+dy$ die mit x und dx zusammen gehörigen rechtwinklichten Ordinaten sind, wenn ferner der Bogen s mit der Abscisse x, und ds mit dx zusammen gehört; so ist $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ die Sehne des Bogens ds. Das Verhältniß des Bogens ds zu seiner Sehne nähert sich dem Verhältnisse der Gleichheit, wenn Bogen und Sehne abnehmen, und dieses Verhältnisses Gränze ist wie beym Kreise allemahl ein Verhältniß der Gleichheit. (Anfangsgr. der Math. Anal. und höhern Geom. 48. §.) Der Bogen ds ist nie seiner Sehne gleich, und der Bogen s ist keinesweges aus unendlichkleinen graden Linien zusammen gesetzt. Wenn man $s=\int(\sqrt{dx^2+dy^2})$ setzt, so heißt das, es sey s die Gränze der Summe aller Sehnen, so wie $\int y\,dx$ nichts anders ist, als die Gränze der Summe aller Rechtecke $y\,dx$. In den Fällen, wenn die Natur der krummen Linie durch eine Gleichung zwischen einem veränderlichen Winkel γ und einer veränderlichen Entfernung z ausgedrückt ist, hat es mit den Integralien $\int\sqrt{(dz^2+z^2\,d\gamma^2)}$ und $\int\frac{1}{2}z^2\,d\gamma$ eine völlig ähnliche Bewandniß. (a. a. O. 52. 69. §.)

58. §.

In dem Dreyecke, dessen Seiten $dx, dy, \sqrt{(dx^2+dy^2)}$ sind, vorausgesetzt, daß dx, dy, ganz unbestimmte veränderliche Linien, eben so wie x, y, bezeichnen, ändert sich die Lage der Hypothenuse $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ gegen die Grundlinie dx, wenn diese abnimmt; die Tangente des Winkels zwischen beyden ist $\frac{dy}{dx}$, wie sich auch dx ändern mag. Die Gränze des Quotienten $\frac{dy}{dx}$ ist der Tangente des Winkels gleich, unter welchem die Tangente im Endpunct der Ordinate y gegen die Abscissenlinie geneigt ist, oder mit andern Worten, die Gränze des Verhältnisses $dy : dx$ ist dem Verhältnisse der Ordinate zur Subtangente gleich. (a. a. O. 46. §.) Wenn durch den Endpunct der Ordinate y eine Normallinie gezogen wird, so liegt zugleich in dieser Normallinie der Mittelpunct eines Kreises, den man durch beyde Endpuncte der Sehne $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ verzeichnen kann. Es sey der mit dieser Sehne $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ zusammen gehörige Bogen dieses Kreises $= du$, der dazu gehörige Winkel am Mittelpunct $= d\psi$, sein Halbmesser $= r$; so sind alle diese Grössen veränderlich und hängen so von dx ab, daß sowohl des Verhältnisses $\frac{ds}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$, als auch des Verhältnisses $\frac{du}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$ Gränze $= 1$, mithin zugleich die Gränze $\frac{ds}{du} = 1$ werden muß. Man kann daraus richtig weiter schliessen, also sey $s = \int du$, denn diese Gleichung ist mit $s = \int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ (57. §.) vollkommen einerley. So wenig aber aus dieser letztern folgt, daß

der

der Bogen s aus unendlich vielen unendlich kleinen graden linien zusammen gesetzt sey, so wenig folgt es aus jener Gleichung, daß s eine Summe unendlich vieler unendlich kleiner Kreisbogen sey: es folgt nichts weiter, als daß die Summe aller Bogen du und die Summe aller Sehnen $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ sich einer und eben derselben Gränze nähern, wenn dx abnimmt, und daß diese gemeinschaftliche Gränze beyder Summen = s sey. Weil übrigens auch $du = r\,d\psi$ ist, so ist zugleich die Gränze $\frac{ds}{r\,d\psi} = 1$.

Setzt man ferner Arc. tang. $\frac{dx}{dy} = \varphi$, so ist $d\varphi$ die Amplitude des Bogens ds vorausgesetzt, daß dx, dy, und alles übrige, was davon abhängt noch unbestimmt sey. Wenn nun auch die Gränze $\frac{d\psi}{d\varphi} = 1$ seyn soll, so folgt aus der Gleichnng $\frac{ds}{du} = 1$, oder $\frac{ds}{r\,d\psi} = 1$ auch $\frac{ds}{r\,d\varphi} = 1$, da dann $r = \frac{ds}{d\varphi}$ der Krümmungshalbmesser ist.

59. §.

Die Cubatur der körperlichen Räume, und die Quadratur der krummen Flächen beruhet auf eben so sichern Gründen, als die Quadratur der ebenen Flächen, und die Rectification der krummen Linien, welche sie begränzen, und es hat mit den aus der körperlichen Geometrie hergenommenen im 43. §. angeführten Redensarten eine ganz ähnliche Bewandniß, wie mit denjenigen, wovon der richtige Sinn im 57. und 58. §. ist festgesetzt worden. Man stellet sich im runden Körper eine Reihe innerer und eine Reihe äusserer gleich hoher Cylinder vor, die alle mit dem runden Körper einerley Axe haben; jede Reihe innerer Cylinder ist kleiner und jede Reihe der äus-

fern Cylinder ist grösser als der runde Körper: die Gränze zwischen beyden ist der runde Körper selbst, und eben diese Gränze zwischen beyden Cylindersummen giebt die bekannte Integralformul. Auf ähnliche Art beschreibt man an der hohlen Seite der krummen Fläche des Körpers eine Reihe innerer, an der erhabenen Seite eine Reihe äusserer conischer Flächen. Jede Summe der innern Flächen ist kleiner, jede Summe der äussern aber gröſſer als die krumme Fläche des runden Körpers: diese krumme Fläche ist die Gränze zwischen beyden, und die bekannte Integralformul giebt diese Gränze zwischen beyden Flächensummen, mithin keine Summe conischer Flächen.

60. §.

1 Fig. Das gleichschenklichte Dreyeck ABD sey ein Schnitt durch die Axe AC eines graden Kegels, und die Axe AC sey bey E, F, G, H, in so viele gleiche Theile wie man will getheilt: wenn nun KS, LT, MV, NW, mit BD parallel, SO, TP, VQ, WR aber mit AC parallel sind; so stellen die Rechtecke KO, LP, MQ, NR, Schnitte durch die Axe gleich hoher im Kegel beschriebener Cylinder vor. Wenn alsdenn AC in n gleiche Theile getheilt ist, so ist eines jeden Cylinders Höhe $= \frac{1}{n}$ AC. Ferner ist

$$EK = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{1}{n} AC, \quad FL = 2 \cdot \frac{BC}{AC} \cdot \frac{1}{n} AC, \quad GM = 3 \cdot \frac{BC}{AC} \cdot \frac{1}{n} AC, \text{ u. s. f. mithin}$$

$$\text{Cyl. } KO = \pi \cdot \frac{BC^2}{AC^2} \cdot \frac{1}{n^3} AC^3$$

$$LP = \pi \cdot 4 \cdot \frac{BC^2}{AC^2} \cdot \frac{1}{n^3} AC^3$$

$$MQ = \pi \cdot 9 \cdot \frac{BC^2}{AC^2} \cdot \frac{1}{n^3} AC^3, \text{ u. s. f.}$$

Weil

Weil nun die Anzahl aller Cylinder $= n - 1$ ist, so findet man ihre Summe $S =$

$$(1 + 4 + 9 + 16 \ldots + (n-1)^2) \frac{1}{n^3} . \pi . BC^2 . AC.$$

Es ist aber sonst bekannt, daß die Summe der Reihe $(1 + 4 + 9 + 16 \ldots + (n-1)^2) = \frac{1}{3}(n-1)^3 + \frac{1}{2}(n-1)^2 + \frac{1}{6}(n-1)$ sey: mithin ist die Cylindersumme

$$S = (\tfrac{1}{3}.(\frac{n-1}{n})^3 + \tfrac{1}{2}\frac{(n-1)^2}{n^3} + \tfrac{1}{6}.\frac{n-1}{n^3})\,\pi . BC^2 . AC.$$

Diese Gleichung ist richtig für jede ganze Zahl, die man für n setzen will, also für jeden Werth des Bruchs $\frac{1}{n}$, mithin auch für $\frac{1}{n} = 0$, oder $n = \infty$!, und in diesem Fall ist $\frac{n-1}{n} = 1$, $(\frac{n-1}{n})^2 . \frac{1}{n} = 0$, $\frac{n-1}{n} . \frac{1}{n^2} = 0$, und es wird $S = \frac{1}{3}\pi . BC^2 . AC.$ Wenn also dieser bekannte Lehrsatz vom Kegel auch nicht sonst synthetisch geometrisch erwiesen wäre; so wäre doch der hier vorgetragene algebraische Beweis desselben eben so scharf, als andre bekannte geometrische Beweise davon; denn die Gränze dieser Cylindersummen, die wie sonst eine veränderliche Grösse von der Zahl n abhängt, ist nichts anders, als der Kegel selbst.

61. §.

Wenn man anstatt der innern Cylinder äussere beschreibt, wie es die 2 Figur vorstellet, so werden KS, LT, MV, NW, die untern Grundflächen, anstatt dessen, daß es vorher die obern waren, und zur vorigen Summe kommt noch der unterste Cylinder BX. Wird dieser noch dazu addirt, und die Summe $= \Sigma$ gesetzt, so findet man

$\Sigma = (1+4+9+16\ldots n^2).\frac{1}{n^3}.\pi.BC^2.AC$, und es ist $(1+4+9+16\ldots+n^2) = \frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$, also ferner $\Sigma = (\frac{1}{3}+\frac{1}{2}.\frac{1}{n}+\frac{1}{6}.\frac{1}{n^2}).\pi.BC^2.AC$. Um die Gränze dieser Summe zu finden, wird $\frac{1}{n} = 0$, oder $n = \infty$ gesetzt, so erhält man $\Sigma = \frac{1}{3}\pi.BC^2.AC$, also wird diese Gränze eben so groß, als die vorige gefunden, wie der Natur der Sache nach nicht anders seyn kann. Man findet also keine Summe unendlich vieler unendlich kleiner Cylinder, auch keine Summe von Cylindern, die sich der Grösse des Kegels unendlich nähert: man findet vielmehr den körperlichen Raum des Kegels selbst.

62. §.

Fig. Es sey nun BAC ein Schnitt durch die Axe AC einer Halbkugel, und BD der Durchmesser eines grossen Kreises, auf dessen Ebene AC senkrecht ist. Die Höhe oder Axe AC dieser Halbkugel sey wie die Höhe des graden Kegels (60. §.) bey E, F, G, H, in so viele gleiche Theile als man will getheilt, auch sey durch jeden Theilungspunct eine Ebene auf AC senkrecht geführt, wovon jede einen zur Axe AC gehörigen Parallelkreis giebt, da dann KS, LO, MP, NQ, die Durchmesser dieser Kreise vorstellen. Eben diese Kreise werden zugleich die obern Grundflächen der in der Halbkugel eben so, wie im graden Kegel (60. §.) beschriebenen gleich hohen graden Cylinder, wovon die Rechtecke KO, LP, MQ, NR, Schnitte durch die Axe vorstellen. Wenn nun AC in n gleiche Theile getheilt und der Halbmesser der Kugel $= r$ gesetzt ist, so hat man $CH = \frac{1}{n}AC$, $CG = 2.\frac{1}{n}AC$, u. s. w. Ferner ist

$$HN' = r^2 - CH' = r^2\left(1 - 1.\frac{1}{n^2}\right)$$

$$GM^2 = r^2 - CG^2 = r^2\left(1 - 4.\frac{1}{n^2}\right)$$

$$FL^2 = r^2 - CF^2 = r^2\left(1 - 9.\frac{1}{n^2}\right)$$

und so ferner fort für alle Cylinder, deren Anzahl $= n - 1$ ist. Wird jedes dieser Quadrate mit $\pi . \frac{1}{n}$ AC multiplicirt, so giebt die Summe aller so gefundenen Producte zugleich die Summe aller innern Cylinder. Man kann auch zuerst alle Grundflächen summiren, so erhält man

$$(n-1)r^2 - (1+4+9+\ldots+(n-1)^2)\frac{1}{n^2}r^2.$$

$$= (n-1)r^2 - (\tfrac{1}{3}(n-1)^3 + \tfrac{1}{2}(n-1)^2 + \tfrac{1}{6}(n-1))\frac{1}{n^2}r^2.$$

Ferner sey S die Summe aller Cylinder, so findet man

$$S = \pi . \frac{n-1}{n} . r^3 - (\tfrac{1}{3} . \frac{(n-1)^3}{n^3} + \tfrac{1}{2}\frac{(n-1)^2}{n^3} + \tfrac{1}{6} . \frac{n-1}{n^3}) . \pi r^3.$$

Die Gränze dieser Summe ist $\pi . r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$, und das ist zugleich der Inhalt der Halbkugel, weil dieser die Gränze aller innern Cylinder ist.

63. §.

Wenn die Cylinder um die Halbkugel beschrieben sind, wie es die 4 Figur vorstellet; so werden KS, LT, MV, NW, untere Grundflächen eben so vieler Cylinder wie vorhin, unten aber kommt der Cylinder BX hinzu, dessen 48§.

sen Inhalt $\pi r^3 . \frac{1}{n} r = \frac{1}{n} \pi r^3$ ist. Demnach bleibt der negative Theil der vorhin gefundenen Summe unverändert, der positive Theil aber wird $= n r^2 . \pi . \frac{1}{n} r = \pi r^3$. Setzt man also die Summe aller äussern Cylinder $= \Sigma$, so findet man

$$\Sigma = \pi r^3 - (\tfrac{1}{3} . \frac{(n-1)^3}{n^3} + \tfrac{1}{2} . \frac{(n-1)^2}{n^3} + \tfrac{1}{6} . \frac{n-1}{n^3}) \pi r^3,$$

und die Gränze dieser Summe ist wie vorhin $= \frac{2}{3} \pi r^3$, wie auch nicht anders seyn kann, weil diese Gränze wiederum nichts anders, als die Halbkugel selbst ist. Man summirt demnach schlechterdings keine unendlich kleine Cylinder, noch weniger sucht man etwas, das sich der Halbkugel ohne Ende nähert: man sucht die Halbkugel selbst. Man summirt eine Reihe Cylinder, wovon man weiß, daß sie alle gleich hoch sind: übrigens läßt man ihre Höhe unbestimmt. Man kennet das Gesetz, nach welchem ihre Grundflächen von einander abhängen, und kann eben darum eine Formul finden, welche diese Summe für jeden Werth der Zahl $\frac{1}{n}$, also auch für $\frac{1}{n} = 0$ angiebt. In diesem besondern Falle ist das keine Cylindersumme mehr, man weiß aber aus andern Gründen, was das für ein geometrischer Körper sey, dessen Inhalt die Formul geben muß, wenn man $-\frac{1}{n} = 0$ setzt: es ist ein Körper, der gröſſer ist als jede innere und kleiner als jede äussere Cylindersumme, und ein solcher Körper ist die Halbkugel. Der Obersatz, welcher bey dieser Art zu schlieſ-

schliessen zum Grunde liegt, ist der Hauptgrundsatz bey der Exhaustionsmethode der alten Geometer.

64. §.

Um der Vollständigkeit willen mag noch das nachste- 1814.
hende Exempel von der Quadratur der Oberfläche der Kugel zur Erläuterung dienen. Es sey also C der Mittelpunct, AE, BD, ein Paar auf einander senkrechte Durchmesser in der Ebene des grösten Kreises ABED der Kugel; man theile den Quadranten AB bey F, G, in so viele gleiche Theile als man will, auch die folgenden Quadranten BE in eben so viele gleiche Theile, ziehe die Sehnen FK, GL, HM, u. s. w. mit BD parallel; so wird dadurch der andre Halbkreis ADE eben so, wie ABE getheilt. Ferner ziehe man die Sehnen AF, FG, GB, AK, KL, LD, aller gleich grossen Bogen beyder Halbkreise, so stellen die Trapezien KFGL, GBDL, u. s. f. Schnitte durch die gemeinschaftliche Axe einer Reihe in der Kugel beschriebenen abgekürzten Kugel vor, wozu auf jeder Seite bey A und E noch ein ganzer Kegel AFK, ENI, kommt. Nun sey die Summe der krummen Flächen aller dieser Kegel $= S$, so ist $S = \pi(AF.OF + FG(OF+PG) + BG(PG+CB) + BH(CB+QH)+\ldots.)$ Weil ferner alle Sehnen AF, FG, GB, BH, ... gleich groß sind, so wird $S = 2\pi AF\,(OF + PG + CB + QH\ldots.)$ Der Kugel Halbmesser sey $= r$, der Winkel $ACF = \frac{1}{n}\pi$, so ist $AF = 2r \sin.\frac{1}{2}.\frac{1}{n}\pi$, $OF = r\sin.\frac{1}{n}\pi$,

$PG = r\sin.2.\frac{1}{n}\pi$, $BC = r\sin.3.\frac{1}{n}\pi$, und so ferner, mithin erhält man $S = 2\pi rr.2\sin.\frac{1}{2}.\frac{1}{n}\pi$

(sin. $\frac{1}{n}\pi$ + sin. 2. $\frac{1}{n}\pi$ + sin. 3. $\frac{1}{n}\pi$ + ...) Es ist aber die Summe aller Sinus, welche den eingeschlossenen Factor ausmachen $= \frac{\sin.(\frac{1}{2}n+1)\frac{1}{n}\pi.\ \sin.\frac{1}{2}(n+1)\frac{1}{n}\pi}{\sin.\frac{1}{2}\frac{1}{n}\pi}$

$= \frac{\sin.(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})\pi.\ \sin.(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n})\pi}{\sin.\frac{1}{2}\frac{1}{n}\pi}$, folglich wird $S = 4\pi rr.\ \sin.(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})\pi.\ \sin.(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n})\pi$. Weil diese Formul allgemein ist, was man auch für eine ganze Zahl anstatt n setzen will, so kann man auch für n die Gränze ∞, oder $\frac{1}{n} = 0$ setzen, so muß sie die Gränze aller conischen Flächen geben, und diese ist nichts anders als die Kugelfläche: mithin ist die Kugelfläche $= 4\pi rr$.

65. §.

Fig. 6. Will man dergleichen conische Flächen um die Kugel beschreiben, so sey der gröste Kreis abed bey f, g, b, h .... wie vorhin getheilt. Jeden so gefundenen Bogen halbire man aufs neue bey S, T, V, W, ... und ziehe die Tangenten AB, FG, GB, BH, ... auch für den andern Halbkreis AK, KL LD, DM, ... so erhält man, wie bekannt ist, ein reguläres Polygon um den Kreis abed. Ferner sind FK, GL, HM, ... mit BD parallel, die Trapezien KFGL, GBDL, DBHM, ... sind wie vorhin Schnitte durch die gemeinschaftliche Axe AE einer Reihe abgekürzter Kegel, und an jeder Seite kommt ein ganzer Kegel AFK, NEI, noch hinzu. Das reguläre Polygon um den Kreis abed ist zugleich ein reguläres Polygon im Kreise, wozu der Halbmesser CA $= r \sec.\frac{1}{2}.\frac{1}{n}\pi$ gehört: demnach wird die im 64. §. gefundene Formul für die Summe aller conischen Flächen

chen auf diesen Fall leicht angewandt, wenn man r sec. $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\pi$ anstatt r setzt. Alsdenn sey diese Summe $= \Sigma$, so ist $\Sigma = 4\pi rr\,(\text{sec.}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\pi)^2\cdot \text{sin.}\,(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})\pi\cdot \text{sin.}\,(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{n})\pi$. Auch diese Formel ist allgemein für jede Zahl n, also auch für ihre Gränze ∞, oder für $\frac{1}{n}=0$, mithin ist auch die Gränze dieser Summe $\Sigma = 4\pi rr$, und diese ist nichts anders als die Kugelfläche selbst. Wer noch daran zweifelte, der würde doch wohl nach Art der Alten den nachstehenden Schluß gelten lassen. Eine Fläche, die grösser ist, als jede Summe innerer und kleiner als jede Summe äusserer conischer Flächen, ist der Kugelfläche gleich. Aber die Fläche $4\pi rr$ hat beyde Eigenschaften: also ist sie der Kugelfläche gleich.

66. §.

Bey ganz allgemeinen Untersuchungen besonders in der höhern Mechanik, wenn von Bewegungen solcher festen Körper die Rede ist, die ihre vorgeschriebene Gestalt und Grösse haben, kommen dergleichen Vorstellungsarten vor, als wenn die Oberfläche des Körpers aus Parallelogrammen, der ganze Raum des Körpers aber, den die Oberfläche begränzt, aus Parallelepipeden bestünde: beyde Seitenlinien jener Parallelogramme, und alle drey Seitenlinien dieser Parallelepipeden werden alsdenn unendlich klein angenommen, so wie es oben am Ende des 43. §. ist bemerkt worden. Ein solches Parallelogramm wird durch die Formul dx dy sec. α ausgedrückt, wenn α der Neigungswinkel der Ebene dieses Parallelograms gegen die Abscissenebene ist, und x, y, rechtwinklichte Coordinaten sind: ein Parallelepipedum dieser Art wird durch die Formul dxdydz ausgedrückt, und x, y, z, sind alsdenn drey rechtwinklichte Coordinaten. Weil nun dx, dy, dz, der gewöhnlichen Vorstellung gemäß unendlich klein sind, so ist dxdy ein unendlichkleines der zweyten,

dx dy dz ein unendlichkleines der dritten Ordnung: also hat es das Ansehen, als wenn bey Rechnungen dieser Art die Vorstellung von unendlichkleinen Grössen verschiedener Ordnungen etwas sehr wesentliches sey. Man darf, wie es scheint, im geringsten nicht zweifeln, daß dxdy unendlichemahl kleiner sey als ydx, und daß dxdydz wieder unendlichemahl kleiner sey als dydx.

Anstatt einer weitläuftigen Antwort bemerke ich nur kurz, daß die gewöhnlichen Lehren von den Ordnungen des Unendlichkleinen, welche im 33 u. f. §. §. hinlänglich sind ins Licht gesetzt worden, hier nicht einmal hergehören. Wenn man die bekannte Integralformul für die Quadratur der Oberfläche runder Körper (Anfangsgr. der Math. Anal. 72. §.) anwendet; so setzt man voraus, daß die Figur eines jeden auf der Axe der Abscissen x senkrechten Schnittes mit der krummen Fläche schon bekannt sey: denn sie soll vermöge der Voraussetzung ein Kreis seyn. Auch wird die Figur aller Schnitte durch die Axe selbst schon als bekannt angenommen. In andern Fällen ist die Figur des Schnittes noch nicht bekannt, und muß durch eine vorläufige Integration gesucht werden, bevor vermittelst einer zweyten Integration die gesuchte Fläche gefunden werden kann. Was man hier sucht, ist sowohl das eine, als das andremahl Gränze einer Summe.

Wenn man den Inhalt des Körpers suchen will, so muß vorher die Fläche des auf der Axe der Abscissen x senkrechten Schnittes bekannt seyn, so wie es die sonst bekannte Formul für die Cubatur runder Köper voraussetzt. (Anf. der Math. Anal a. a. O.) Um diese Fläche zu finden, wenn sie noch nicht bekannt ist, muß, wie vorhin bemerkt ward, zuerst die Figur des Schnittes, ferner vermittelst einer zweyten Integration die Fläche desselben gesucht werden; alsdenn allererst kann man vermittelst einer dritten Integration den körperlichen Inhalt finden. Daher kommt es, daß die Formul für die Quadratur ein

dopeltes Differential, und die Formul für die Cubatur ein dreyfaches Differential enthält. Die Fläche ist eigentlich $= \int\int dx\,dy$, und der körperliche Inhalt $= \int\int\int dx\,dy\,dz$. Wer mit den nöthigen Vorkenntnissen versehen ist, der findet von dem allen in meinen Anfangsgründen der Math. Analysis im 224. u. f. §. §. hinlänglichen Unterricht.

Die Fluxionenrechnung und ihre Uebereinstimmung mit der Differentialrechnung.

67. §.

Was Herr von Leibnitz Differenzen veränderlicher Grössen, und in dem besondern Fall, wenn sie verschwinden sollten, Differentialien nannte, das nannte Herr Newton dem Sinne nach eben so: er nannte sie incrementa und decrementa, und in dem besondern Fall, wenn sie verschwinden sollten, so setzte er das Wort momentanea hinzu. Oft sagt er kurz: momenta anstatt incrementa oder decrementa momentanea. In seiner bekannten Abhandlung: Methodus fluxionum et serierum infinitarum, (Newtoni Opuscula Mathematica Philosophica et Philologica, Lausannae et Genevae 1774. Opusculum. II.) welche schon im Jahr 1671 soll ausgearbeitet gewesen seyn, nennt er diese momenta bald indefinite parua, bald infinite parua. Ein incrementum momentaneum der veränderlichen Grösse x setzt er $= xo$, und in dem Beweise des I. Problems a. a. O. T. II. p. 60. heißt es: cum autem finxerimus o quantitatem infinite paruam, vt exponere posset quantitatum momenta, termini in eam ducti pro nihilo possunt haberi cum aliis collati, eos igitur negligo. Wenn man das und mehrere ähnliche Stellen

len mit der Leibnitzischen Art des Vortrages zusammen hält; so darf man wohl um so weniger an demjenigen zweifeln, was H. Newton in dem berühmten Scholion (Phil. Nat. Princip. Math. Lib. II. Sect. II. Lemma II.) selbst bezeuget; rescripsit vir Clarissimus (Leibnitius) se quoque in eiusmodi methodum incidisse, et methodum suam communicauit a mea vix abludentem praeterquam in verborum et notarum formulis.

68. §.

In dem angezogenen Lemmate II. sind die Wörter momenta, mutationum velocitates, auch zuweilen das Wort incrementa gebraucht, und Newtons eigene Erklärung darüber ist diese: quantitates vt indeterminatas et instabiles et *quasi* motu fluxuue perpetuo crescentes vel decrescentes hic considero, et eorum incrementa vel decrementa momentanea sub nomine momentorum intelligo: — — Caue tamen intellexeris particulas finitas — — intelligenda sunt principia iam iam nescentia finitarum magnitudinum. Neque enim spectatur in hoc Lemmate magnitudo momentorum sed *prima nascentium proportio.* Eodem recidit si loco momentorum vsurpentur *velocitates incrementorum ac decrementorum*, (quas etiam motus, mutationes et *fluxiones* quantitatum nominare licet) vel finitae quaeuis quantitates velocitatibus hisce proportionales. Am deutlichsten stehen die Gründe von dem allen im I. Buch in den ersten Lehnsätzen des I. Abschnittes, und vornehmlich im Scholio beym Lemmate XI. Die vielerley Nahmen, welche hier vorkommen, rühren nur daher, weil die Sache neu war, und Newton sie gern soviel möglich einleuchtend machen wollte. Nach Art der Alten wollte er nicht alle Beweise einkleiden, weil das allerdings seinen Vortrag sehr umständlich gemacht hätte: er wollte aber auch verhüten, daß man nicht glauben mögte, seine Art zu schliessen sey einerley mit Caval-

lerii

lerii Methode des Untheilbaren. Daher kommt die Vorstellung der stetigen geometrischen Grössen, der Linien, Flächen und Körper, als entstünden sie durch Bewegung eines Puncts einer Linie, einer Fläche, daher die Erinnerung, daß man auch loco momentorum velocitates incrementorum et decrementorum verstehen, daß man die Nahmen motus, mutationes, fluxiones quantitatum brauchen könne. Newtons momenta sind also mit den Leibnitzischen Differentialien so vollkommen einerley, daß es mir sehr wahrscheinlich ist, man habe nach der Zeit in Engelland vornehmlich nur um deßwillen den Nahmen fluxiones gewählt, damit es um so mehr das Ansehen haben solle, Newtons neue Analysis, welche eben darum auch den Nahmen Flurionenrechnung erhielt, sey was anders als Leibnitzens Differentialrechnung. Newton selbst hatte sie sonst methodum rationum primarum et vltimarum genannt, und das war der beste der Sache selbst am meisten angemessene Nahme.

69. §.

Newtons Meinung ist also Anfangs wohl nicht gewesen, daß man beym systematischen Vortrage der ganzen Theorie die Begriffe von Bewegung Zeit und Geschwindigkeit der Bewegung zum Grunde legen solle: dieses scheint mir sehr deutlich aus seinem Vortrage in der oben schon angeführten Abhandlung: Methodus fluxionum et serierum infinitarum zu erhellen (a. a. O. pag. 54.) Er will nicht, daß man den gewöhnlichen Begriff verstehen soll, wenn er das Wort Zeit braucht, es soll nichts anders als eine gleichförmig wachsende veränderliche Grösse bedeuten. Die Geometer waren zum Theil schon durch Cavallerii Methode an die Vorstellung gewohnt, man könne sich die geometrischen Grössen als aus untheilbaren Theilen zusammengesetzt vorstellen: er wollte sie wieder an die Vorstellung stetiger Grössen gewöhnen, und

als

als ein Exempel dazu schien ihm der Begriff von dem, was man Zeit nennt, am geschicktesten. Man sollte sich eine veränderliche linie eben so wie die Zeit als ein continuum denken. Er sagt ausdrücklich: Tempus *formaliter* non considero, sed suppono, quod vna ex propositis quantitatibus homogenea cum aliis crescat aequabili fluxu, ad quam ceterae, tanquam ad tempus referuntur, quae ideo *per analogiam* non inconcinae dici potest *tempus*. Quoties igitur vox tempus in sequentibus inuenietur; hoc verbum sumendum est, non quasi tempus intellexissem in sua *formali* significatione, sed tanquam significans quantitatem illam *a tempore diuersam*, cuius aequabili incremento vel fluxu tempus exponitur et mensuratur. In dem Beweise a. a. O. pag. 59. 60. ist auch gar nicht die Rede von Vergleichung der Geschwindigkeiten, womit x und y wachsen, sondern davon, wie sich die Gleichung zwischen x und y ändert, wenn $x + \dot{x}o$ anstatt x, und $y + \dot{y}o$ anstatt y gesetzt wird, $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ heissen auch hier quantitatum momenta, und werden wie die leibnitzischen Zeichen dx, dy, bey der Rechnung gebraucht. Zwey veränderliche Grössen x und y hängen hier nach einem gewissen Gesetz von einander ab, das die Gleichung zwischen beyden ausdrückt, und es wird daraus eine andre Gleichung zwischen $\dot{x}o$ und $\dot{y}o$, als zwischen incrementis momentaneis der Grössen x und y vollkommen eben so hergeleitet, wie man es macht, wenn man nach Leibnitzens Art rechnet. Ob man dx, dy, anstatt $\dot{x}o$, $\dot{y}o$, schreiben will, das ist wohl sehr gleichgültig. Demnach darf man kühn behaupten, Newtons Fluxionenrechnung und Leibnitzens Differentialrechnung sey nicht allein in Ansehung der Rechnungsregeln selbst, sondern auch in Ansehung der Gründe, worauf beyde beruhen, vollkommen einerley: nur hat Newton diese Gründe besser, deutlicher, und völlig mathematisch richtig angegeben.

70. §.

70. §.

Die Begriffe von Bewegung Zeit und Geschwindigkeit, welche Newton nur zur Erläuterung seines Vortrages brauchte, gehören gar nicht hieher. Wenn also Herrn Maclaurins weitläuftiges Werk Treatise of Fluxions Edinb. 1742, wovon wir auch eine französische Uebersetzung haben: Traité des fluxions par le R. P. Rezenas, a Paris 1749, nicht sonst allerley lehrreiche Untersuchungen enthielte, und als ein gutes mathematisches Repertorium diente; (ein ordentliches System darf man darin nicht suchen) so wäre es sehr entbehrlich. Daß bey den ungleichförmigen Bewegungen, wenn ein Punct in der Zeit t den Weg x zurückgelegt, und in diesem Augenblick die Geschwindigkeit v erlangt hat, $v = \frac{dx}{dt}$ sey, und daß dieser Ausdruck den Weg bezeichne, der in einer Zeitsecunde, oder jeder andern für Eins angenommenen Zeit würde zurückgelegt werden, wenn mit dem letzten Augenblick der Zeit t die Bewegung gleichförmig zu werden anfienge; das läßt sich auf ein Paar Octavseiten völlig ins Licht setzen. (M. s. meinen Lehrbegriff der ges. Math. 4 Theil 99. 105. §. Mech. 29. 41. S.) Die Gleichung zwischen t und x sey welche sie wolle, so kann auch t die Abscisse, x die Ordinate einer graden oder krummen Linie vorstellen, nachdem es eine einfache oder höhere Gleichung ist. Nur im ersten Fall können gleiche dx mit gleichen dt zusammen gehören, alsdenn wächst x mit t gleichförmig, und es ist $\frac{x}{t} = \frac{dx}{dt}$ das Increment oder Decrement, um welches sich x ändert, wenn t um ein Increment $= 1$ wächst. Im andern Fall ist die Gränze des Werths $\frac{dx}{dt}$ das Increment oder Decrement, um welches sich x,

wenn

wenn die fernere Aenderung nun gleichförmig bliebe, ändern würde, wenn sich x um ein Increment = 1 änderte. Demnach kann man allemahl $\frac{dx}{dt}$ als die Geschwindigkeit betrachten, womit sich die Function x der veränlichen Grösse t ändert, wächst oder abnimmt, wenn t Aenderungen leidet. Wer das weiß, der übersiehet ohne alle Umstände, daß es einerley sey, ob man lieber von Fluxionen und Geschwindigkeiten sprechen, oder grade zu Incremente, Momente, Differentialien sagen will. Der Nahme Differentialverhältniß, ist so gut als der Nahme erstes oder letztes Verhältniß, oder Gränze des Verhältnisses. Die Begriffe von Bewegung Zeit und Geschwindigkeit zum Grunde setzen, daraus analytische Rechnungsregeln und geometrische Lehrsätze herleiten, das heißt die Ordnung umkehren. Man muß die Grundlehren der Mechanik aus analytischen und geometrischen Grundlehren, nicht diese aus jenen herleiten.

71. §.

Will man vollends die allerbekanntesten Dinge auf synthetisch geometrische Art nach der Erhaustionsmethode der Alten beweisen, alle specielle Fälle haarklein aufzählen, die man überaus leicht übersiehet, wenn man nur nach den bekanntesten Regeln der Buchstabenrechenkunst ein Zeichen in das entgegengesetzte verändert; so verliert die Wissenschaft den ganzen Vorzug wieder, wodurch sie sich vor den Methoden der Alten auszeichnen sollte. Die Gedult des lernenden, dem es vornemlich darum zu thun ist, die Rechnungs- und Erfindungsregeln mit ihren Gründen kennen zu lernen, wird ohne Zweifel sehr ermüdet, wenn er auf dem Wege geführt wird, den H. Maclaurin vorgezeichnet hat. Er legt seinem leser einen ganzen Quartanten, und noch die Hälfte eines andern von

eben

eben der Stärke vor, und führt ihn beynahe durch das ganze Gebiet der Mathematik herum, ohne ihm einen leitfaden zu geben, woran er sich halten kann, den er doch in dem Buch vornemlich suchte, um den kürzesten Weg zu finden: allererst in der Mitte des zweyten Quartanten macht er ihn mit den allerleichtesten Rechnungsregeln bekannt, wo doch Newtons Gränzen der Verhältnisse wieder vorkommen, die vorher ebenfalls hie und da eingemischt waren, auch nicht vermieden werden konnten, weil die ganze Sache davon abhängt. Das heißt doch wohl, die Sache ausserordentlich erschweren und über alle Maasse ins weitläuftige ziehen. Newtons Erfindung sollte ja eben eine so ermüdende Weitläuftigkeit des Vortrages zu vermeiden dienen: er selbst sagt in dem Scholion beym Lemmate XI. a. a. O. Praemisi haec lemmata ut effugerem taedium deducendi perplexas demonstrationes more veterum Geometrarum ad absurdum. Die Wissenschaft hat das Schicksal erfahren, was so häufig bey menschlichen Angelegenheiten beobachtet wird; man hält selten eine geschickte Mittelstrasse. Die deutschen und französischen Mathematiker wollten alles, auch sogar die Elementargeometrie, abgekürzt haben, und blieben nicht sehr um die Gründlichkeit des Vortrages besorgt. Die Engelländer wollten nichts von der Gründlichkeit verlieren, auch der Schein sollte wegfallen, als wäre ihr Vortrag weniger gründlich, als der Vortrag der Alten Geometer: darüber verfiel man in eine grössere weit mehr ermüdende Weitläuftigkeit als die war, zu deren Vermeidung die neuern analytischen Rechnungsmethoden die vortreflichsten Hülfsmittel hätten abgeben sollen. Die nun weiter folgenden wenigen Bemerkungen werden das alles, worauf es bey der Fluxionsmethode ankommt, hinlänglich ins licht setzen.

72. §.

Die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung wird aus der Grösse des Weges beurtheilet, welcher in bekannter Zeit, die man für Eins annimmt, zurück gelegt wird: Geschwindigkeit für eine Stunde, eine Minute, eine Secunde, ist der in einer Stunde, in einer Minute oder Secunde zurück gelegte Weg. Wenn S den in der Zeit T mit der ungeänderten Geschwindigkeit C zurückgelegten Weg bezeichnet: so ist $C = \frac{S}{T}$. Wenn ferner in der folgenden Zeit dT der Weg dS zurück gelegt wird, so bleibt $C = \frac{dS}{dT}$, da dann dT, dS ganz unbestimmte Werthe sind, die in einerley Verhältniß bleiben, es mag dT so groß man will genommen werden. Bey der Berechnung in Zahlen muß man T oder dT in Secunden, Minuten oder Stunden ausdrücken, nachdem man C für eine Secunde, Minute oder Stunde wissen will. Weiß man, daß die Bewegung ungleichförmig, also ihre Geschwindigkeit nach Verlauf eines jeden noch so kleinen Zeittheilchens schon grösser oder kleiner sey, als sie im Anfang desselben war; so sind auch die in jeden zweyen auf einander folgenden gleichgroßen Zeittheilen zurück gelegten Wege ungleich groß. Man kann indessen doch fragen: wie groß der mit dem folgenden Zeittheile dT zusammengehörige Weg dS seyn würde, wenn mit dem letzten Augenblick der Zeit T alle fernere Beschleunigung oder Verzögerung der Bewegung aufhörte? Setzt man voraus, daß dS den Weg bezeichne, welcher unter dieser Bedingung während des Zeittheiles dT würde zurück geleget werden, so ist auch $\frac{dS}{dT}$ das Maaß der

Ge-

Geschwindigkeit der ungleichförmigen Bewegung für den letzten Augenblick der schon verflossenen Zeit T.

73. §.

Bey der beschleunigten Bewegung ist der in jedem folgenden Zeittheile zurück gelegte Weg grösser, als er im nächstvorhergehenden eben so grossen Zeittheile war. Man nehme an, daß zwischen T und S eine Gleichung gegeben sey, so kann aus dieser Gleichung der mit der Zeit $T - t$ zusammengehörige Weg $S - \sigma$, so wie auch der mit der Zeit $T + t$ zusammen gehörige Weg $S + s$ gefunden werden. Ist nun C die Geschwindigkeit im letzten Augenblick der Zeit T, so ist $C > \frac{\sigma}{t}$ und zugleich $C < \frac{s}{t}$, es mag t so groß oder so klein als man will angenommen werden. Kann man also einen Werth angeben, der grösser ist, als jeder Werth $\frac{\sigma}{t}$ und kleiner als jeder Werth $\frac{s}{t}$, so ist das der gesuchte Werth C. Wenn demnach $\frac{s}{t} = P + X$ und $\frac{\sigma}{t} = P - Y$ gefunden wird, alsdenn aber X und Y solche Functionen von t sind, die mit t zugleich verschwinden; so muß $P = C$ seyn, und C ist die Gränze des Werthes $\frac{s}{t}$. Uebrigens siehet man leicht, daß bey der verzögerten Bewegung $C < \frac{\sigma}{t}$ und zugleich $C > \frac{s}{t}$ seyn müsse, und daß ebenfalls C die Gränze des Werthes $\frac{s}{s}$ bleibe.

74. §.

Es sey $S = A.T^2$, so ist

$$S + s = A.T^2 + 2A.T.t + A.t^2$$
$$S - \sigma = A.T^2 - 2A.T.t + A.t^2$$

mithin $\frac{s}{t} = 2A.T^2 + At$, $\frac{\sigma}{t} = 2A.T - At$.

Diese Gleichungen zeigen, daß $2A.T$ gröſſer, als jeder Werth $\frac{\sigma}{t}$ aber zugleich kleiner als jeder Werth $\frac{s}{t}$ sey: mithin ist $2A.T = C$. Wenn nun wie es in der Differentialrechnung gewöhnlich ist, dS anstatt s, dT anstatt t geschrieben wird, so heißt das, es sey die Gränze des Werths $\frac{dS}{dT} = C$. Würde nun die Bewegung nicht weiter beschleuniget, so würde in jeder folgenden endlichen Zeit dT der Weg $dS = C.dT$ zurück geleget werden.

Wäre $S = A.T - B.T^2$, so hätte man

$$S + s = A(T + t) - B(T^2 + 2T.t + t^2),$$
$$S - \sigma = A(T - t) - B(T^2 - 2T.t + t^2),$$
$$\text{also } s = (A - 2B.T)t - B.t^2$$
$$\text{und } \sigma = (A - 2B.T)t + B.t^2.$$

Die Bewegung wäre also nun eine verzögerte keine beschleunigte Bewegung. Indessen bliebe sonst alles wie vorhin, nur hätte man $C < \frac{\sigma}{t}$ und zugleich $C > \frac{s}{t}$, übrigens bliebe doch $C =$ der Gränze des Werthes $\frac{s}{t} = A - 2B.T$.

75. §.

Die Gleichung zwischen S und T sey welche sie wolle, so kann man sie als eine Gleichung ansehen, welche die Natur einer graden oder krummen Linie ausdrückt, wenn T die Abscisse, und S die rechtwinklichte Ordinate vorstellet. Alsdenn muß man T in Fussen, Zollen, oder sonst einem willkührlich gewählten Längenmaasse ausdrücken. Wenn eine Linie, wie die Abscisse T, beständig um gleiche Differenzen t wächst oder abnimmt, so kann man sagen, sie wachse oder sie vermindere sich gleichförmig. Wenn also $S = A.T$ ist, mithin die Gleichung für eine grade Linie gehört, so wächst auch die Ordinate S mit der Abscisse gleichförmig: in dem Fall $S = A - B.T$ würden gleichförmige Verminderungen der Ordinate mit gleichförmigen Vermehrungen der Abscisse zusammen gehören. Ueberhaupt kann man gleichförmige Aenderungen sagen, so bedarf es dessen nicht, daß man jene beyden Fälle unterscheide. Verminderung ist alsdenn negative Aenderung, wenn Vermehrung als positive Aenderung betrachtet wird. Nun läßt sich die mit einer bekannten für Eins angenommenen Aenderung der Abscisse zusammen gehörige Aenderung der Ordinate eben so, wie die mit einer bekannten für Eins angenommenen Zeit zusammen gehörige Geschwindigkeit der Bewegung messen. Man kann fragen: um wie viel ändert sich die Ordinate, wenn sich die Abscisse um einen Fuß, oder um einen Zoll ändert? Wofern sich nun S allemahl gleichförmig ändert, so ist die Aenderung $= \frac{dS}{dT}$, vorausgesetzt, daß sich S um dS ändre, wenn sich T um dT ändert. Die Formul giebt die Aenderung der Ordinate für einen Zoll oder einen Fuß Aenderung der Abscisse, nachdem man dT in Fussen oder Zollen ausdrückt. Will man die Vorstellung zum Grunde setzen, dS werde durch Bewegung eines

Punets in so vielen Zeitsecunden oder Zeitminuten beschrieben, als Zolle oder Fusse die Länge der Linie dT ausmachen; so ist $\frac{dS}{dT}$ die Geschwindigkeit dieser Bewegung. Demnach kann man sich auch $\frac{dS}{dT}$ als die Geschwindigkeit der Aenderung der Ordinate für jeden Zoll oder für jeden Fuß Aenderung der Abscisse vorstellen, und das heißt Fluxion der Ordinate.

76. §.

Wenn die Gleichung zwischen S und T nicht einfach ist, so können mit gleichen Aenderungen der Grösse T nicht gleiche Aenderungen der Function S zusammen gehören. Die Function S ändert sich nun ungleichförmig, für gleiche nach einander folgende Werthe dS findet man ungleiche vielleicht wachsende, vielleicht abnehmende Werthe dS. Wird aber für T ein gegebener Werth angenommen, so kann man fragen: wie groß der mit dem nächsten Werth dT zusammen gehörige Werth dS seyn würde, wenn die Aenderung für grössere Werthe T gleichförmig bliebe? Um die Antwort auf diese Frage zu finden, schließt man wie im 73. §., wenn man für jeden Werth der Zeit T die Geschwindigkeit der ungleichförmigen Bewegung finden will, nachdem während der Zeit T schon der Weg S ist zurück gelegt worden. Die mit der gleichförmigen Fluxion der veränderlichen Grösse T zusammengehörige Fluxion der Function S suchen heißt also nichts anders, als die Gränze des Verhältnisses $\frac{dS}{dT}$ suchen.

Demnach sind nicht allein die Regeln der Flurionenrechnung mit den Regeln der Differentialrechnung, sondern auch die Gründe jener Regeln mit den Gründen dieser Re-

Regeln einerley. Man hätte also vormahls der Wissenschaft einen ungemein viel wichtigern Dienst geleistet, wenn man anstatt der nichtsbedeutenden Streitigkeit über die Frage, wer der erste Erfinder der neuern Analysis sey? die wahren Gründe davon völlig ins Licht gesetzt, und sich über einen der Sache am besten angemessenen Sprachgebrauch gemeinschaftlich verglichen hätte.

77. §.

Will man die völlige Aehnlichkeit des Begriffes von Geschwindigkeit der Bewegung und Geschwindigkeit der Aenderung einer Function S für jeden Werth der veränderlichen Grösse T, wovon S abhängt, beybehalten; so muß man noch bemerken, daß T eine Zahl, keine linie sey, wenn von Bewegungen die Rede ist. Wenn also T und S Abscisse und Ordinate einer krummen linie sind, also $\frac{dS}{dT}$ die Fluxion von S in dem eben erwähnten Sinne vorstellen soll; so muß dT als eine Zahl durch eine bekannte Einheit V ausgedrückt werden, und $\frac{dS}{dT}$ stellet eine linie vor, um welche S gleichförmig wachsen würde, wenn T um einen Zoll, einen Fuß, grösser werden sollte. Die linie $\frac{dS}{dT}$ würde nun in eben dem Maaß durch eine Zahl ausgedrückt gefunden werden. Soll dagegen S eine Fläche, einen Körper, einen Winkel bezeichnen, wenn diese Fläche, dieser Körper, dieser Winkel als eine Function von der veränderlichen linie T abhängt; so ist auch $\frac{dS}{dT}$ eine Fläche, ein Körper, oder ein Winkel, und in allen Fällen muß dT als eine Zahl, nicht als eine linie betrachtet werden.

78. §.

Wenn x, y, Grundlinie und Höhe eines rechtwinklichten Dreyeckes sind, und $y = nx$ ist; so ist seine Fläche $z = \frac{1}{2} xy = \frac{1}{2} nx^2$. Mit dem Werthe dx gehört der Werth $dz = nx\,dx + \frac{1}{2} n dx^2$ zusammen, aber diese Werthe dz sind für gleiche dx nicht gleich groß, sondern desto grösser, je grösser x angenommen wird. Wenn nun für $x = a$, und $y = na = b$ die Ungleichförmigkeit der Aenderung der Werthe dz aufhörte, so müste nun $dz = nad.x = b\,dx$ werden. Das heißt, für jeden unbestimmten Werth x oder y ist $dz = ydx$. Man will den vollständigen Werth dz nicht wissen, sondern nur den Theil davon, welcher sich wie dx verhält, wenn x also auch y unverändert bleiben. Die Flurion von z ist aber eigentlich $= \frac{V}{dx}. ydx$, (77. §.) also eine Fläche, die in Quadratzollen oder Quadratfussen gefunden wird, nachdem man die Linien in Längenzollen oder Längenfussen ausdrückt. Stellt man sich anstatt der Hypothenuse dieses rechtwinklichten Dreyeckes eine krumme Linie vor, zwischen den Endpuncten der Ordinate y und einer andern Ordinate im Anfangspunct der Abscissen: so ist z eine Fläche zwischen der Abscisse, den beyden Ordinaten in ihrem Anfangs- und Endpunct, und der krummen Linie zwischen den Endpuncten dieser Ordinaten. Ferner bleibt $dz = ydx$, wie auch y von x abhängen mag, und das erhellet unmittelbar aus denselben Gründen, woraus es folgt, wenn z ein gradlinichtes Dreyeck ist: auch wäre eigentlich die Fluxion von $z = \frac{V}{dx} ydx$.

79. §.

Bey wirklichen Bewegungen verhalten sich die Geschwindigkeiten wie die Wege, welche von einer gegebe-

nen

nen Gränze angerechnet gleichförmig in einerley gegebener Zeit würden zurück gelegt werden, ohne daß es eben nöthig ist, diese Zeit für Eins anzunehmen: man kann diese beschriebenen Wege anstatt der Geschwindigkeiten selbst verstehen. Die Fluxionen der Function z einer veränderlichen Grösse x verhalten sich für verschiedene Werthe x wie die mit gleichen Incrementen dx zusammen gehörigen Incremente oder Decremente dz, um welche sich die Function z ändern würde, wenn diese Aenderungen nicht weiter ungleichförmig blieben. Dieserwegen kann man die so entstehenden Incremente oder Decremente selbst verstehen, wenn von Fluxionen der Function z die Rede ist. In diesem Sinne ist also $dz = ydx$ die Fluxion der Fläche z. So macht Maclaurin seine Fluxionen vorstellig, und so betrachtet, sind sie nichts weiter, als Incremente oder Decremente, kurz Differenzen, um welche z wachsen oder abnehmen würde, wenn nur diejenigen Theile dieser Differenzen verstanden werden sollen, die mit dx in einerley Verhältniß bleiben. Eben das und nichts anders findet man, wenn man die Gränze des Werthes $\frac{dz}{dx}$ sucht, wie Maclaurin selbst an mehr Orten in seinem oben angeführten Werke beweiset: also ist das ein unnöthiger Umweg, durch den man geführt wird, wenn man sich an die Begriffe von Fluxionen gewöhnen soll. Der Begriff von Geschwindigkeit ist nur der Mechanik eigenthümlich, und in der Geometrie ein fremder Begriff: es läßt sich nicht so ganz kurz und doch einleuchtend genug zeigen, was Geschwindigkeit der Vermehrung oder Verminderung einer Function, besonders wenn die Aenderung ungleichförmig ist, eigentlich seyn soll, wenn man nemlich mit diesen Begriffen die Wissenschaft anfangen, und sie Anfängern vortragen will. Maclaurin fühlt das selbst, und getrauet sich nicht einmahl eine Erklärung von Geschwin-

schwindigkeit zu geben, verfällt gar dabey in ganz unnöthige der Sache gar nicht angemessene halbmetaphysische Speculationen. (a. a. O. Tom. I. Art. 5. 6.) Dagegen sind die Begriffe von dem, was Gränze eines Verhältnisses, Gränze einer Summe sey, ganz ungemein einleuchtend, und einem jeden vollkommen faßlich, der nur aus den Anfangsgründen die nöthigen Vorkenntnisse mitbringt. Ich mögte wohl mit dem alten Stiefel, der sich bey Beurtheilung gewisser unnöthigen Umständlichkeiten beym Vortrage der practischen Rechenkunst so ausdrückt, (Arithmetica Integra Authore Mich. Stifelio, Norimb. 1544.) hinzusetzen, daß mir die vielerley Vorstellungsarten von Fluxionen, Incrementen, Differentialien, unendlich kleinen Elementen u. s. f. nichts als vexationes populi zu seyn scheinen. Wie viel vergebliches Lesen hätte man nicht den Liebhabern der Mathematik ersparen können, wenn man bey den so leicht faßlichen vollkommen einleuchtenden Vorstellungsarten der Newtonschen Gränzen der Verhältnisse und Summen geblieben wäre. Newtons Vorstellungen von Fluxionen konnten für solche, die in der Wissenschaft schon einige Uebung erlangt hatten, ganz gute Erläuterungen bleiben: aber Grundbegriffe, um die ganze Wissenschaft darauf zu bauen, hätte man daraus nicht machen sollen.

80. §.

Wenn man Schriftsteller vergleicht, die ihre Werke nicht lange vor Newtons und Leibnitzens Zeitalter verfasset haben, so wird man aufs vollkommenste überzeugt, daß der Nahme Fluxionen und die damit verwandten Redensarten von der Unvollkommenheit der ehemaligen Erfindungsmethoden und der Armuth einer noch nicht ausgebildeten Sprache beym Vortrage mathematischer Lehren herrührten. Man hatte die algebraische Analysin noch bey weiten nicht in der heutigen Vollkommenheit; man wus-

wuste mit den Gleichungen und Formuln noch nicht recht umzugehen, wenn es nicht so sehr darauf ankam, aus bekannten Grössen, die alle ihre bestimmten Werthe hatten, etwa nur einen oder einige wenige Werthe einer unbekannten Grösse zu finden, als vielmehr darauf, daß man ganz allgemeine Gesetze finden sollte, nach welchen zwey oder mehr veränderliche Grössen von einander abhängen. Was man dem Verstande durch algebraische Formuln noch nicht recht einleuchtend zu machen wuste, das suchte man durch Zeichnungen zugleich dem Auge sinnlich darzustellen. Zahlen und ihre Verhältnisse gegen einander stellte man durch Linien vor, besonders wenn es auf Irrationalverhältnisse ankam. Die Bemerkung war leicht zu machen, daß man sich vorstellen könne, eine Linie entstehe durch Bewegung eines Puncts, weil wir ja auf die Art Striche als Bilder der Linien ziehen, und nun konnte es auch leicht jemanden, der lateinisch schrieb, einfallen zu sagen, die Linie entstehe fluxu puncti, da es ja bekannt ist, daß das Wort fluere bey lateinischen Schriftstellern sehr allgemein, und nicht eben von Bewegungen flüssiger Dinge allein gebraucht wird. Eben darum konnte auch Neper in seinem bekannten Werke: Mirifici Canonis Logarithmorum Descriptio leicht darauf verfallen, so zu reden: übrigens aber finde ich nicht so viele Aehnlichkeit des Vortrages beym Neper mit dem Vortrage nach der Fluxionen- oder Differentialrechnung, wie es scheint, daß H. Maclaurin will gefunden haben. (a. a. O. I. B. VI. Cap. Art. 151.) Wenn gleich Neper von Geschwindigkeit der Bewegung zweyer Puncte redet, welche die Linien beschreiben sollen, wovon die eine eine Reihe in geometrischer Progression abnehmender Zahlen, die andre ihre Logarithmen vorstellen soll; so vergleicht er doch diese Geschwindigkeiten keinesweges auf eine allgemeine Art, wie man nachher die sogenannten Fluxionen zu vergleichen angefangen hat. Diese Redensarten sind bey ihm nichts weiter als Beweise

se von der damahligen Armuth der Sprache. Man wuste sich beym Vortrage der Gründe neu erfundener Theorien im Ausdruck noch nicht zu helfen, so wie es auch leicht zu erachten ist, daß die Gründe der Theorien selbst sich nicht allemahl gleich anfangs in ihrem ganzen Lichte dem Verstande des Erfinders darstellten. Wenn Neper jetzt lebte, und mit dem gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft so bekannt wäre, wie er es mit dem damahligen war; so würde er eine bessere Definition vom Logarithmen geben, und weder Bewegung noch Geschwindigkeit hinein bringen. Die Art, wie Neper seine Rechnungen einleitet, und die Theorie davon vorträgt, bleibt übrigens allemahl sehr sinnreich, sie ist der Art, wie man damahls bey solchen Untersuchungen zu verfahren gewohnt war, sehr wohl angemessen: wer mit den nöthigen Vorkenntnissen versehen ist, wird Nepers beyde hieher gehörige Werke, besonders das nach seinem Tode von seinem Sohne herausgegebene Opus posthumum: Mirifici Canonis Logarithmoenm Constructio, nicht ohne Vergnügen lesen. Mehr Nachrichten davon findet man im 2ten Theil meines Lehrbegriffes der Mathematik in VI. Abschnitt der Allgem. Rechenkunst: in der zweyten Auflage des Buches sind sie noch mit einigen Zusätzen vermehrt worden.

Ueber des H. Leonhard Eulers Werk von der Differentialrechnung.

81. §.

Zum Beschluß muß ich noch einige Anmerkungen beyfügen, die unser vornehmstes classisches Werk von der Differentialrechnung betreffen: ich meine des H. Leonhard Eulers oben schon einigemahl angeführte Institutiones Calculi Differentialis. Wer das Buch lieset, um zuerst daraus nicht allein die Regeln der Rechnung, sondern

auch

auch die Gründe der ganzen Wissenschaft kennen zu lernen, der mögte wohl bey dem Vortrage im III. Cap. des 1sten Theils manchen Anstoß finden. Einiges das den Begriff vom Unendlichgrossen betrift, ist oben im 18. u. f. §§. schon berührt worden: hier will ich nur einige den Begriff vom Unendlichkleinen betreffende Bemerkungen beyfügen. Es wird a. a. O. Cap. III. §. 83. festgesetzt, das Unendlichkleine sey mit der Null einerley, bey dem allen aber wird doch im 84sten und den folgenden §§. behauptet, daß eine Null gegen die andre jedes geometrische Verhältniß haben könne, wenn gleich ihre Differenz ebenfalls Null sey. Kurz es wird das ganze gewöhnliche System von Vergleichung der unendlichkleinen Grössen, auch eben so die gemeine lehre von den unzählig vielen verschiedenen Ordnungen des Unendlichkleinen vorgetragen. Im 93. und den folgenden §§. werden die ähnlichen Lehren vom Unendlichgrossen daraus gefolgert, ein Unendlichgrosses kann gegen das andre jedes mögliche endliche Verhältniß haben, auch kommen hier die unzählig vielen Ordnungen des Unendlichgrossen vor, völlig so, wie diese Lehre sonst vorgetragen wird.

82. §.

Als dieses nach seinem übrigen Inhalt höchst schätzbare Werk vor 30 Jahren zuerst ans licht trat, war ich noch mit den ersten Uebungen in dieser Wissenschaft beschäftiget, und mein Vergnügen war sehr groß, als ich ein so vollständiges Werk von der Differentialrechnung zu Rathe ziehen konnte, das einen Euler zum Verfasser hatte. Vom Unendlichkleinen dachte ich schon ohngefähr eben so, wie ich jetzt davon denke, mit der Exhaustionsmethode der Alten hatte ich mich bekannt gemacht, wie meine ersten Schriften davon Proben enthalten, unter andern die Praelectiones Matheseos Theoreticae Elementaris Rostochii et Wism. 1758, auch kannte ich Newtons

tons Gränzen der Verhältnisse aus seinen Principiis Phil. Nat. Mathematicis: es konnte also nicht fehlen, daß mir H. Eulers Vortrag der Gründe der Differentialrechnung Anstoß verursachen muste. Ich fand bey einem der grösten Meister in dieser Wissenschaft die gemeine Lehre vom Unendlichkleinen und Unendlichgrossen, die mich nie befriediget, und die ich eben darum schon ganz aufgegeben hatte: darüber fing ich an zu zweifeln, ob es nicht mit dieser Lehre wohl gar seine gute Richtigkeit haben, und nur an mir selbst die Schuld liegen mögte, daß ich noch nicht alles reiflich erwogen hätte. Ich prüfte alles von neuen, konnte mich aber mit diesen Lehren von Unendlichen nicht wieder aussöhnen. Ich fand vielmehr bey fernerer Durchlesung der Eulerischen Differentialrechnung, daß alles lichtvoller ward, wenn ich mich an die Vorstellung hielte, daß hier Gränzen veränderlicher Verhältnisse gesucht würden, wie denn auch H. Euler selbst mehrmahls erinnert, daß man nicht dy, ddy, d^3y, u. s. f. sondern die Verhältnisse $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, u. s. f. suche.

§3.

Eine Frucht dieser Untersuchungen waren die Aufsätze im 1sten und 2ten Stück meiner Beyträge zur Aufnahme der Theoretischen Mathematik, Rostock 1759, 1760. Meine Hochachtung gegen H. Euler war viel zu groß, und das Vertrauen auf meine Einsichten, da ich mich selbst noch als Anfänger betrachten muste, viel zu gering, als daß ich es gewagt hätte, nahmentlich gegen H. Euler und dessen Vortrag etwas zu erinnern. Darum versuchte ich in dem ersten Aufsatze nur zu zeigen, wie weit ich glaubte, daß man die gewöhnlichen Sätze nur als Rechnungssprache auch alsdenn rechtfertigen könne, wenn man das Unendlichkleine in der Schärfe $= 0$ setze.

Daß

Daß aber das alles bey weiten nicht so befriedige, als wenn man die Newtonschen Begriffe von den Gränzen der Verhältnisse zum Grunde setze, und daß eben diese Gränzen grade alsdenn gefunden werden, wenn man dx mithin auch dy in der Schärfe = o setze, suchte ich im zweyten Aufsatze zu zeigen. So war eigentlich meine Absicht, Herrn Eulers Vortrag zu ergänzen, zu beweisen, daß es allerdings vollkommen richtig sey, wenn H. Euler sagt, was man Unendlichklein nenne sey eigentlich Null, daß man aber den übrigen Sätzen, welche H. Euler im III. Cap. nach der gemeinen Lehre vorträgt, einen ganz andern Sinn beylegen müsse, als sie den Worten nach zu haben scheinen.

84. §.

Ich habe nach der Zeit mehrmahls Veranlassung gehabt, das alles weiter zu prüfen, und eine neue Veranlassung dazu habe ich oben im 1. §. erzählt. Jetzt finde ich, daß ich bey meinen ehemaligen Untersuchungen darüber, als ich damit beschäftiget war, Herrn Eulers Differentialrechnung durchzustudiren, auf den Inhalt der diesem Werke vorangesetzten überaus lehrreichen Vorrede nicht genug aufmerksam gewesen bin. Diese merkwürdige Vorrede verbreitet das helleste Licht über den Inhalt des III. Capitels im I. Theil, und ich glaube, daß es auch für andre Leser der Eulerschen Schriften interessant sey, wenn ich sie auf den Inhalt der Vorrede aufmerksam mache. Man liefet gewöhnlich die Vorrede eines Buches zuerst nur mit einer gewissen Flüchtigkeit durch, man vermuthet darin nur eine allgemeine Anzeige vom Inhalt des Buches, und eben nichts wesentliches, wovon man nicht glauben sollte, daß es im Buch selbst noch vollständiger und in seinem ganzen Lichte wieder vorkommen müsse. Während des Lesens im Buch selbst erinnert man sich nicht eben leicht wieder an den Inhalt der Vorrede, wenn der

Ver-

Verfasser nicht selbst dazu die Veranlassung giebt, vornemlich wenn es ein wissenschaftliches Buch ist, das die ganze anhaltende Aufmerksamkeit des Lesers erfodert. So ist es mir mit der Vorrede zur Eulerschen Differentialrechnung ergangen. Nun da ich sie mit mehrerer Aufmerksamkeit wieder durchgegangen bin, und mit dem Inhalt des Cap. III. P. I. verglichen habe, halte ich mich fast davon überzeugt, daß H. Euler a. a. O. im Buch selbst nur die gemeine Sprache vom Unendlichen theils um deßwillen beybehalten habe, weil man damahls, die Schriften der Engelländer ausgenommen, allgemein so redete, theils weil er selbst bey seinen ersten Uebungen in der Wissenschaft sich an diese Sprache mogte gewöhnt haben. Denn eben in der Vorrede erklärt er sich aufs deutlichste völlig so, daß mir gar kein Zweifel übrig bleibt, er wolle im Cap. III. P. I. alles den Begriffen von den Gränzen der Verhältnisse gemäß verstanden wissen. Freylich wäre es für den angehenden Mathematiker besser und unterrichtender gewesen, wenn das wesentliche des Inhalts der Vorrede in das III. Cap. des I. Theils gebracht, und statt dessen in der Vorrede kurz erklärt wäre, wie die gemeine Sprache vom Unendlichen damit zusammen hienge. Die nachstehenden Puncte sind es vornemlich, welche den Inhalt der Vorrede ausmachen.

85. §.

Zuerst Erklärungen davon, was man veränderliche und beständige Grössen nennt mit Erläuterungen durch Beyspiele. Ferner wie veränderliche Grössen nach mancherley Gesetzen von einander abhängen können, da dann die eine kurz eine Function der andern heißt. Aus der bekannten Gleichung zwischen zweyen veränderlichen Grössen, wenn eine als eine Function der andern betrachtet wird, findet man zugleich eine Gleichung zwischen dem Increment oder Decrement, um welches eine Function y

ei=

einer veränderlichen Grösse x wächst oder abnimmt, wenn x um eine willkührliche Differenz ω vermehrt oder vermindert wird. Es sey $y = x^2$, und y wachse um das Increment z, wenn x um ω wächst, so ist $z = 2x\omega + \omega^2$, also $z : \omega = 2x + \omega : 1$. Eben so kann man allemahl beyde Incremente vergleichen, selbst alsdenn, wenn man annimmt daß ω mithin zugleich z wieder verschwinde, da dann $z : \omega = 2x : 1$ im vorigen Exempel gefunden wird. 2) Nun die Erklärung, was die Differentialrechnung sey, sie bestehe nemlich in der Methode jene Verhältnisse der wieder verschwindenden Incremente veränderlicher Grössen zu finden. Dabey wird zu wiederhohlten mahlen bemerkt, man suche die verschwindenden Incremente nicht, sondern ihre Verhältnisse, mithin suche man endliche Grössen, als die Exponenten dieser Verhältnisse. Bis dahin kommt der Nahme Unendlichklein gar nicht vor, auch nicht bey der nun folgenden Erklärung davon, was Integralrechnung sey, eine Methode nemlich aus dem bekannten Verhältnisse der verschwindenden Incremente veränderlicher Grössen die Gleichung zwischen diesen Grössen selbst zu finden.

86. §.

Nach Festsetzung dieser Grundbegriffe folgt allererst die Anzeige davon, wie man diese verschwindenden Incremente bezeichne, und was man für einen Sprachgebrauch beobachte: man nenne sie Differentialien auch unendlichkleine Grössen, der letztere Nahme bedeute aber der Natur der Sache nach Grössen, die man $= 0$ setze. Das letztere wird zu wiederhohlten mahlen aus dem Grunde bewiesen, weil sonst keine Differentialgleichung wie z. E. $\frac{d.x^2}{dx} = 2x$ richtig seyn könne, sondern allemahl $\frac{d.x^2}{dx} = 2x + \omega$ bleiben müsse, so lange nicht $\omega = 0$ sey. Es wird von neuen eingeschärft, man müsse nicht

glauben, daß die Differentialrechnung Regeln gebe, die Differentialgrössen zu finden, sondern nur ihre Verhältnisse, also endliche Grössen. Wenn auf diese allein vernunftmässige Weise (hoc modo, qui solus est rationi consentaneus) die Gründe der Differentialrechnung festgesetzet würden, so fielen alle vermeinte Schwierigkeiten von selbst weg: unendlichkleine Grössen, die kleiner als jede noch angebliche Grösse, und doch noch nicht eigentlich Null seyn sollten; könne man nicht annehmen, wofern nicht die ganze Differentialrechnung verdächtig bleiben solle. Der Sache sey nicht geholfen, wenn man sich auf die Uebereinstimmung der Resultate mit denjenigen berufe, die auch vermittelst völlig scharfer geometrischer Schlüsse gefunden werden: denn ein Irthum könne den andern aufheben, und die Rechnung werde nur um so mehr verdächtig.

87. §.

Herr Euler erklärt also den Ausdruck unendlichkleine Grösse für einen blossen Nahmen völlig so, wie ich mich oben im 29. §. darüber erklärt habe, der nichts anders als Null bezeichne: bey dieser Behauptung blieb aber ein sehr scheinbarer Zweifel übrig, der noch gehoben werden muste. Wenn die Differentialien oder unendlichkleinen Grössen wirkliche Nullen sind, so ist auf keine Weise begreiflich, wie man sie alsdenn noch mit einander vergleichen könne. Dieser Zweifel wird auf eine vollkommen befriedigende Art gehoben, die hieher gehörige Stelle enthält das wichtigste in der ganzen Vorrede, weßwegen ich sie ganz hieher setze. Incrementum quantitatis x, quod in genere indicauimus per ω, ad incrementum quadrati x^2, quod est $2x\omega + \omega^2$, rationem habet ut 1 ad $2x + \omega$, quae semper differt a ratione 1 ad 2 x, nisi sit $\omega = 0$: at si statuamus, esse $\omega = 0$, tum demum vere affirmare possumus, hanc rationem fieri exacte ut 1 ad 2 x. Interim tamen perspicitur, quo minus illud incrementum ω accipitur, eo propius

pius

pius ad hanc rationem accedi; unde non ſolum licet, ſed etiam naturae rei convenit, haec incrementa primum ut finita conſiderare, atque etiam in figuris, ſi quibus opus eſt ad rem illuſtrandam, finite repreſentare,*) deinde vero haec incrementa *cogitatione* continuo minora fieri concipiantur, ſicque eorum ratio continuo magis *ad certum quendam limitem appropinquare* reperietur, quem autem tum demum attingant cum plane in nihilum abierint. Hic autem limes, qui quaſi *rationem ultimam incrementorum illorum* conſtituit, verum eſt objectum Calculi differentialis. Deutlicher und richtiger kann man ſich nicht erklären, wenn man ſich das, was hier geſucht wird, als Gränzen veränderlicher Verhältniſſe, oder als letzte Verhältniſſe vorſtellet: alſo muß man den Inhalt des III. Cap. im 1 Theil dieſer ganz ungemein deutlichen Erklärung gemäß verſtehen.

88. §.

H. Euler ſetzt ſehr richtig hinzu, es hätten ſchon ältere Schriftſteller lange vor Leibnitzen und Newton von dieſen einzig und allein richtigen Gründen der Differentialrechnung in ihren Werken Gebrauch gemacht, ohne daß grade der Nahme ſchon eingeführt geweſen ſey, ſelbſt die letzten Verhältniſſe der Incremente veränderlicher Gröſſen, wenn eine ſich als eine rationale Function der andern ausdrücken laſſe, hätte man vor Newtons und Leibnitzens Zeitalter angeben können, beyde hätten die Methode nur allgemeiner gemacht, und Leibnitzen bleibe das Verdienſt, daß er ihr die Form einer Wiſſenſchaft gegeben habe, da man ſie ſonſt nur als ſinnreiches Hülfsmittel bey gewiſſen beſondern Unterſuchungen angewandt hätte. Auf die vielerley nachher gebräuchlich gewordenen

*) Man mahlte ſonſt häufig kleine Linien, Winkel, Bogen, Flächen, Körper in Figuren hin, nannte ſie unendlichklein, und wandte nun die oben beurtheilten Lehren vom Unendlichkleinen darauf an, als wenn ſich das Unendlichkleine ſo wie das Endliche den Sinnen darſtellen lieſſe.

Nahmen komme nichts an, es sey gleichviel, ob man Incremente, Differentialien, oder Fluxionen sagen wolle, man suche hier nichts als letzte Verhältnisse, und um die zu finden, müsse man die gewöhnlich so genannten unendlichkleinen Incremente $=0$ setzen. Auf eben den Gründen beruhe auch alles, was die Differentialien der zweyten und der höhern Ordnungen betreffe, es werde alles vollkommen einleuchtend, worüber man sonst mehr spitzfindige als nützliche Untersuchungen angestellet habe. Man betrachte auch die höhern Differentialien nie für sich, sondern nur ihre Verhältnisse. Weil $\frac{dy}{dx}$ nichts anders als eine Function einer veränderlichen Grösse x oder y sey, so könne man aufs neue die Gränze des Verhältnisses $d\frac{dy}{dx} : dx$ suchen, welches mit $\frac{ddy}{dx^2}$ übereinkomme, und aufs neue eine Function von x oder y vorstelle, wenn nicht vielleicht in besondern Fällen eine beständige Grösse daraus werde. So sey ferner $d.\frac{ddy}{dx^2} : dx$ oder $\frac{d^3y}{dx^3}$ und überhaupt $\frac{d^ny}{dx^n}$ die Gränze eines Verhältnisses.

Man suche nie d^ny, man suche den Werth $\frac{d^ny}{dx^n}$, also allemahl endliche Grössen, oder vielmehr Functionen einer veränderlichen Grösse x, die vielleicht nur in besondern Fällen, wenn statt x dieser oder jene bestimmte Werth gesetzt wird, verschwinden oder unendlich groß werden. Das ist also Herrn Eulers Urtheil über die vermeinten mehrern Ordnungen des Unendlichkleinen: sie sind nichts anders als Rechnungssprache, es giebt kein andres Unendlichkleines als die einzige Null, also giebt es auch keine vermeinte Ordnungen des Unendlichkleinen.

89. §.

89. §.

Ueber das Unendlichgrosse hat sich zwar H. Euler in der Vorrede nicht erklärt; wenn aber nach seinen Vorstellungen $\frac{0}{0}$ nichts anders als Gränze eines Verhältnisses ist, so ist auch $\frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{0} : \frac{1}{0} = \frac{0}{0}$ nichts anders. Giebt es nur eine Null, und nicht unzählig viele verschiedene Nullen, so giebt es auch nur ein $\infty = \frac{1}{0}$, und nicht unzählig viele verschiedene unendlichgrosse Grössen. Die mehrern verschiedenen Ordnungen des Unendlichgrossen fallen mit den Ordnungen des Unendlichkleinen zugleich weg, jene sind so wie diese nichts anders als Rechnungssprache. Der Behauptung, daß es nur ein ∞ gebe, wird man nicht entgegen seßen, daß eine unbegränzte Linie gleichwohl was anders als eine unbegränzte Fläche, und diese auch was anders als ein unbegränzter Körper, mithin doch um deßwillen nicht jedes unendlichgrosse mit dem andern einerley sey. Es versteht sich wohl von selbst, daß hier der allgemeine Begriff einer Grösse zum Grunde liege: denn sonst wäre es eben soviel, als wenn jemand behaupten wollte, nicht jede Zahl 3 sey mit der andern einerley, weil 3 Thaler was anders ist, als 3 Pfunde. Eigentlich sind 0 und ∞ die äussersten Gränzen aller denkbaren abstracten Zahlen, (14. §.) und das Zeichen ∞ für sich allein bedeutet weder Linie noch Fläche noch Winkel, so wie das Zeichen 3 für sich allein weder 3 Thaler noch 3 Pfunde bedeutet. Wenn aber in einer algebraischen Formul ein x oder y als Zeichen einer veränderlichen Grösse vorkommt, so weiß man von selbst, ob x oder y eine Linie oder Fläche, oder sonst was anders sey, und dann giebt es für dieses x oder y nur eine Gränze ∞, so wie es dafür nur eine Gränze 0 giebt.

Einige Zusätze zur ersten Abhandlung.

Zusatz zum 8. §.

Aufgabe.

Fig. 78. Auf der Hypothenuse CT eines bey A rechtwinklichten Dreyeckes ACT ist CB der Grundlinie CA gleich angenommen, und BD auf AC senkrecht: man soll eine Gleichung zwischen der Hypothenuse CT und dem Segment CD der Grundlinie finden.

Auflösung.

Die Dreyecke ACT und DCB sind einander ähnlich, also ist $CD : CB = AC : AT$. Vermöge der Voraussetzung aber ist $CB = AC$, also auch $CD : AC = AC : CT$, und daraus folgt $CD \cdot CT = AC^2$. Ein Kreis aus dem Mittelpunct C mit dem Halbmesser CA beschrieben geht durch B, und wenn gleich der Winkel ACD grösser oder kleiner genommen wird, so bleibt doch CB von beständiger Grösse, wenn CA, wie hier vorausgesetzt wird, einerley bleibt: dagegen ändern sich mit dem Winkel zugleich CD und CT. man setze die beständige Grösse $CA = CB = r$, die veränderlichen Grössen $CD = x$, $CT = y$, so ist $xy = r^2$ die gesuchte Gleichung, oder $y = \frac{r}{x} \cdot r$.

Einige Folgesätze.

1. Je kleiner x angenommen wird, desto grösser wird die Zahl $\frac{r}{x}$ mithin auch y desto grösser; umgekehrt aber, je grösser x genommen wird, desto kleiner wird $\frac{r}{x}$, also auch y. Weil B allemahl in der Peripherie des Kreises bleibt, so kann CD nie grösser als CA, also x nie grösser als r werden, mithin $\frac{r}{x}$ nie kleiner als r. Wenn B durch A nach P rückte, so würde CD

CD oder x wieder abnehmen, also $\frac{r}{x}$ und zugleich y wieder wachsen: demnach ist r eine Gränze, unter welche y nicht abnehmen, so wie der Bruch $\frac{r}{x}$ nicht kleiner als 1 werden kann. Dagegen kann CD oder x soweit man will abnehmen. Wenn der Bogen AF ein Quadrant ist, und B nach F rückt, so wird CD immer kleiner, und wenn B mit F zusammen fällt, so fällt BD mit FC, so wie D mit C zusammen, also ist nun $x = 0$, und $y = \frac{r}{0}.r$.

2. Wenn in einem andern rechtwinklichten Dreyeck ECS die Grundlinie $CE = b$, der anliegende spitze Winkel $ECS = ACT$ ist, so sind ACT, ECS, auch eben so BCD und GCH ähnliche Dreyecke, also haben ihre gleichnahmigen Seitenlinien gegen einander einerley Verhältniß. Vermöge der gefundenen Auflösung der vorgelegten Aufgabe ist $CH.CS = CE^2$, oder $CS = \frac{CE}{CH}.CE$.

Es ist aber $BG:CH = CB:CD$, oder $CE:CH = CA:CD$, also auch $CS = \frac{CA}{CD}.CE$. Wird nun $BE = b$ gesetzt, so giebt das $CS = \frac{r}{x}.b$. So wie $r = CA$ den Maaßstab für CT abgiebt, so wird $b = CE$ der Maaßstab für CS, und die Zahl welche angiebt, wie viel mahl CE in CS enthalten sey, bleibt mit derjenigen einerley, welche angiebt, wie viel mahl CD in CT enthalten sey.

3. Die Zahl $\frac{r}{x}$ kann man also ein für allemahl für jede Grösse des Winkels ACB suchen, und es ist bey die-

dieser Rechnung gleichgültig, wie groß man CA oder CB annehmen will: deßwegen kann CA oder $r = 1$ angenommen und ein für allemahl gesucht werden, wie groß für jeden Winkel BCD die Zahl sey, welche die Länge jeder Perpendiculärseite im rechtwinklichten Dreyecke BCD angiebt, wenn die Hypothenuse BC für eins angenommen wird. Das ist der Grund aller trigonometrischen Rechnungen. Wenn für den Winkel BCD die Seiten BD und CD gefunden sind, so hat man auch AC, AT, CT, im Dreyeck ACT; denn es ist $AC = BC$, $CT = \frac{AC}{CD}.AC$ vermöge der gegebenen Auflösung, und die Proportion $CD : DB = CA : AT$ giebt $AT = \frac{DB}{CD}.CA$.

4) Die Linien BD, CD, AT, CT, heissen in der Trigonometrie Sinus, Cosinus, Tangente, Secante, des Winkels ACB, vornemlich alsdenn, wenn $CA = 1$ gesetzt ist: die Zahlen, welche die Länge dieser Linien für den Halbmesser $= 1$ angeben, sind in den trigonometrischen Tafeln aufgeführt, und wenn der Winkel $ACB = \alpha$ gesetzt ist, so schreibt man kurz sin α, cos. α, tang. α, sec. α, anstatt der kurz vorhin angezeigten Nahmen. Diese Zeichen können demnach alle mögliche Zahlen bedeuten, wiewohl mit der Einschränkung, daß sin. α oder cos. α nur alle ächte Brüche, die nicht grösser als 1 sind, sec. α alle ganze Zahlen und unächte Brüche, welche 1 übertreffen, tang. α aber alle mögliche sowohl ganze als gebrochene Zahlen nach Verschiedenheit des Winkels α bezeichnen kann. Darauf beruhet vornemlich der vortheilhafte Gebrauch der trigonometrischen Tafeln.

5) Wenn im Dreyeck ECS die Länge der Grundlinie $CE = b$, und die Grösse des Winkels $SCE = \alpha$ bekannt ist, so ist wie vorhin gefunden ward, $CS = \frac{r}{x}\, b$.

Wenn nun $r = 1$ angenommen und cos. α anstatt x geschrieben, alsdenn aber die Hypothenuse $CS = h$ gesetzt wird; so ist $h = \frac{1}{\text{cos. } \alpha} . b$. Weil übrigens die Dreyecke ACT, BCD einander ähnlich sind, so ist $CD : CB = CA : CT$, oder cos. $\alpha : 1 = 1 : \text{sec. } \alpha$, also sec. $\alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha}$, weßwegen man auch $h = b \text{ sec. } \alpha$ setzen kann. Weiter ist $CD : BD = CE : ES$; wenn also $ES = p$ gesetzt wird, so hat man cos. α : sin. $\alpha = b : p$, folglich $p = \frac{\text{sin. } \alpha}{\text{cos } \alpha} . b$. Ueberdem ist auch $CD : DB = CA : AT$, also cos. α : sin. $\alpha = 1 : \text{tang. } \alpha$, und tang. $\alpha = \frac{\text{sin. } \alpha}{\text{cos. } \alpha}$: deßwegen erhält man auch $p = b \text{ tang. } \alpha$.

Anmerkung.

Mir ist die Erinnerung gemacht worden, daß manche in der Mathematik eben nicht sehr geübte Leser vielleicht wünschen mögten, aus der vorstehenden Abhandlung den eigentlich philosophisch richtigen Begriff vom Mathematisch-Unendlichen kennen zu lernen, und das vornemlich um deßwillen, weil man auch in andern philosophischen Wissenschaften den Begriff vom Unendlichen nöthig habe: es könne also eine deutliche und richtige Auseinandersetzung des Begriffes vom Mathematisch-Unendlichen auch wohl den Weg bahnen, den Begriff vom Metaphysisch-Unendlichen mehr ins Licht zu setzen. Wieweit dieses zu hoffen sey, darüber wage ich nicht zu urtheilen: indessen hat mich diese Erinnerung doch bewogen, hier kurz zu zeigen, was es mit den im 8. §. als bekannt vorausgesetzten trigonometrischen Grundformuln für eine Bewandniß habe. Man hat nun in der zu dieser Aufgabe und den beygefügten Zusätzen gehörigen Figur das alles noch

mehr sinnlich vor Augen, was im 8. §. sonst als bekannt ist angenommen worden.

Uebrigens aber muß ich noch diese Bemerkung beyfügen, daß ich mir nicht getraue, einem jeden auch in der Mathematik wenig oder gar nicht geübten Leser den Inhalt der vorstehenden Abhandlung nach ihrem ganzen Umfange einleuchtend zu machen: eben dasselbe habe ich auch im 23. §. der Abhandlung selbst schon geäussert. Es ist algebraische Sprache, wovon der eigentliche Sinn hier festgesetzt werden soll: diese zu verstehen, dazu gehört schon einige Uebung in der Buchstabenrechenkunst, und in Anwendung der Regeln, wie man mit Gleichungen umgehen muß. Die allgemeinen Grundbegriffe von Summen, Differenzen, Producten, Quotienten, Verhältnissen, Potenzen und Wurzeln, und was davon abhängt, muß man sich so geläufig gemacht haben, daß sie sich dem Verstande sogleich in ihrem ganzen Lichte und in ihrer ganzen Allgemeinheit darstellen, wenn man die Zeichen davon erblickt. Das sehr einfache Zeichen $\frac{1}{x}$ bedeutet nicht etwa nur einen Quotienten, sondern alle mögliche, wenn x noch etwas unbestimmtes bezeichnet. Wenn sich jemand von dem allen noch mehr unterrichten wollte; dem könnte ich vorschlagen, in der neuen Ausgabe des 2ten Theils meines Lehrbegriffes der gesammten Mathematik den 2ten Abschnitt der Allgemeinen Rechenkunst nachzulesen.

Zusatz zum 35. §.

Wenn hier behauptet wird, daß man ein unendlich grosses mit dem andern nicht weiter vergleichen könne; so dürfte das, was zur Erläuterung der trigonometrischen Grundbegriffe in dem vorstehenden Zusatz zum 8. §. vorgetragen ist, und selbst die dazu gezeichnete Figur, einen scheinbaren Zweifel erregen. Es ist allemahl das Verhältniß CS:CT, auch eben so ES:AT, dem Verhältniß

se CE : CA gleich: wenn also CE vielleicht 100mahl, 1000mahl und mehrmahl, überhaupt nmahl grösser als CA ist; so bleibt auch CS = n. CT, ES = n. AT, wenn gleich ACB = 90° wird, also CS, CT, so wie ES, AT, unendlich groß werden. Diesemnach kann ein unendliches n mahl grösser als das andre seyn, wie der gemeinen lehre gemäß ist. Allein so scheinbar auch diese Vorstellung immer seyn mag, so falsch und unrichtig ist doch die Art, wie die Schlußfolge aus den Vordersätzen hergeleitet wird. Die Verhältnisse CS : CT und ES : AT sind nur so lange dem Verhältnisse CE : CA gleich, als sich die Glieder jener Verhältnisse bestimmt angeben lassen, sie mögen übrigens so groß seyn, als sie wollen. Man kann AT = AC. tang. α, ES = CE. tang. α schreiben, und wenn man nun $\frac{ES}{AT} = \frac{CE.\,tang.\,\alpha}{AC.\,tang.\,\alpha}$ setzt, so fällt tang. α von selbst schon aus der Rechnung weg, α mag seyn, was man will. Dieser Bruch hängt von α gar nicht ab, also auch nicht von $\alpha = 90°$. Nur so lange als AT und ES von CS geschnitten werden, giebt es ein Paar ähnliche Triangel, wie ACT, ECS; in dem Fall ACB = 90° sind keine solche Triangel mehr da, es giebt keine Spitze T auch keine Spitze S mehr, weder AT noch ES hat einen Endpunct, wie kann man also noch fragen, wie viel mahl AT in ES enthalten sey? Man kann sich zwar hier ebenfalls ein letztes Verhältniß vorstellen, womit ES, AT, aufhören ausmeßbare Linien zu seyn, dasselbe ist aber von dem Verhältnisse ES : AT nicht verschieden, wenn auch ACB kein rechter Winkel ist. Wenn man sonst letzte Verhältnisse, letzte Summen, oder überhaupt Gränzen veränderlicher Werthe sucht, so muß die Formul, welche bey der Rechnung zum Grunde liegt, von einer veränderlichen Grösse so abhängen, daß jede Aenderung dieser Grösse zugleich eine Aenderung jener zur Folge hat. Das ist der Fall gar nicht bey Quotienten dieser Art wie

$\frac{\text{EC. tang. } \alpha}{\text{AC. tang. } \alpha}$, oder $\frac{\text{EC. sec. } \alpha}{\text{AC. sec } \alpha}$; der Winkel α mag sich wie man will ändern, jene Quotienten behalten einerley unveränderlichen Werth $\frac{EC}{AC}$. Ein solcher Quotient ist das nicht, was man nach dem sonst gewohnten Sprachgebrauch Function des veränderlichen Winkels α nennen würde. Wäre dagegen $y = \frac{a \text{ tang.} \alpha + b}{f \text{.tang.} \alpha + c}$; so würde y mit α Aenderungen leiden, es würde $y = \frac{a}{f}$ werden, wenn $\alpha = 90°$ werden sollte: aber nicht um deßwillen, weil nun der unendlich grosse Nenner im unendlich grossen Zähler so viel mahl als f in a enthalten wäre, sondern weil auch $y = \frac{a + b : \text{tang.} \alpha}{f + g : \text{tang.} \alpha}$ ist, und $\frac{b}{\text{tang.} \alpha}$ so wie $\frac{g}{\text{tang.} \alpha}$ Nullen werden, wenn $\alpha = 90°$ seyn soll.

Zusatz zum 46. §.

In einem Lehrbuch, wie die Elemente der Mathematik von H. Joh. Friedr. Lorenz, 1 Theil, Leipz. 1785. seyn sollen, hätte ich die gemeine Sprache von Unendlichkleinen, vom omni *dabili* minus, von den Ordnungen des Unendlichkleinen und Unendlichgrossen, am allerwenigsten vermuthet. H. Lorenz wollte die Geometrie des Euklides der neuern Mathematik ganz einverleiben: warum auch nicht die Geometrie des Archimedes? Andre Schriftsteller haben doch beydes geleistet: denn die Geometrie des Euklides der neuern Geometrie einverleiben heißt doch wohl nicht, den Euklides nur abschreiben? Verdient Archimedes nicht eben so gut als Euklides, daß man ihn der neuern Mathematik einverleibe? Mir ist es wenigstens unerwartet, daß ich in den Elementen des H. Lo-

lorenz nichts vom Archimedes, oder vielmehr von den vortreflichen Methoden finde, wie Archimedes die Lehren vom Kreise und von der Kugel behandelt. Warum findet sich kein einziger von diesen schönen Lehrsätzen, selbst der zweyte Satz im XII. Buch des Euklides nicht, in der reinen Geometrie? Warum ist alles, was hieher gehört in die gemischte Geometrie gebracht, und von keinem einzigen dieser Lehrsätze ein geometrischer Beweis gegeben worden? Beweise wie §. 39. S. 251. erkenne ich nicht für geometrische. Die im 28. 30 und 34. §. aus dem Grundsatze im 27. §. gefolgerten Beweise kann man in einem Handbuche für die ersten Anfänger, oder für solche, welche die Mathematik zum practischen Gebrauch treiben wollen, gelten lassen: strenge geometrische Beweise im Geiste des Euklides und Archimedes sind es nicht. (Man vergleiche meinen Auszug aus den Anfangsgründen und dem Lehrbegr. der Math. Wiss. 297. §. Geom. 156. S.) Sind denn die Schriften, welche wir vom Archimedes haben, nicht eben so gut unschätzbare Denkmale des Alterthums als die Elemente des Euklides? Freylich hätte eine solche Behandlung dieser Lehrsätze nach Art des Archimedes mit dem gemeinen höchstunvollkommenen Vortrage der Gründe der Differential- und Integralrechnung nur einen desto grössern Contrast gemacht. Ich begreife auf keine Weise, wie ein solcher Vortrag einen Mann befriedigen kann, der mit dem Euklides so vertraut ist, als Herr Lorenz, gesetzt ihm wäre Archimedes auch ganz unbekannt. Beym Durchlesen des 1sten §. der Differenzialrechnung wuste ich nicht, ob ich meinen Augen trauen sollte: ich schlug zurück und sahe nach dem Titelblade, ob ich auch ein andres Buch aus Versehen ergriffen hätte; denn ich konnte mich darin gar nicht finden, daß hier der 1ste Satz aus dem zehnten Buche des Euklides in einer ganz andern Gestalt erscheint, als in der eigenen Uebersetzung, die wir vom Herrn Lorenz haben. Der Satz beym Euklides hat die Natur einer Aufgabe, wie folget:

1. Satz

1. Satz nach dem Euklides im X. Buch.

Satz. Wenn zwey ungleiche Grössen AB, C, gegeben sind, und es wird der grössern AB mehr als die Hälfte abgenommen, dem Reste abermahls mehr als die Hälfte, und dies immer so fort: so bleibt einmahl ein Rest, welcher kleiner ist, als die gegebene kleinere Grösse C.

Es sey der C Vielfaches DE > AB. Theile DE in ihre der C gleiche Theile, DF, FG, GE. Nimm von der AB mehr als die Hälfte BH, und vom Rest mehr als die Hälfte HI, und dies immer so fort, bis in AB soviel Abschnitte, als in DE sind.

Da AB < DE, und von AB mehr als die Hälfte BH, von DE aber weniger als die Hälfte weggenommen wird, so ist der Rest AH < DG. Folglich, da von AH mehr als die Hälfte HI, von DG aber nur die Hälfte GF weggenommen wird, ist der Rest AI < DF. Nun ist DF = C. Folglich AI < C.

Anmerkung.

Auf eben die Art wird der Satz bewiesen, wenn bey der grössern AB das Weggenommene immer auch nur die Hälfte beträgt.

Aufgabe nach H. Lorenz.

9 Fig. Es soll eine Grösse, die kleiner ist, als jede gegebene noch so kleine Grösse A, quantitas omni dabili minor, gefunden werden.

Man nehme eine beliebige Grösse BC, und mache von A ein Vielfaches DG > BC. Nimmt man nun von BC die Hälfte BH, und von DG weniger als die Hälfte DE: so ist der Rest HC < EG. Nimmt man von HC die Hälfte HK, und von EG die Hälfte EF: so ist der Rest KC < FG. Nun ist FG = A. Folglich KC < A.

Auf-

Auflösung und Beweis ist wie beym Euklides, aber der Satz selbst ist beym H. Lorenz ganz anders als beym Euklides ausgedrückt. Beym Euklides findet sich keine quantitas omni *dabili* minor, nur eine gegebene Grösse C, die kleiner als AB seyn soll, der Rest AI bleibt kleiner, als als die quantitas *data* C.

Am allerwenigsten weiß Euklides etwas von den Folgen, die H. Lorenz beyfüget.

1. Wäre die gegebene Grösse auch die allerkleinste, die man nur geben kann: so läßt sich doch eine Grösse darstellen, welche noch kleiner ist — — !! Leuchtet dem Herrn Lorenz denn ein so sichtbarer Widerspruch nicht in die Augen? Und nun weiter das Beyspiel zur Erläuterung vom Berührungswinkel!!

2. Selbst eine solche Grösse, welche kleiner ist, als die allerkleinste, läßt sich ohne Ende in noch kleinere Theile theilen.!!! Zum Beweise wieder die Berührungswinkel ungleicher Kreise mit einer gemeinschaftlichen gradlinichten Tangente.!!! Gewiß ist das dem H. Lorenz unbekannt geblieben, was ich im I. Theil meines Lehrbegriffes der gesammten Mathematik im 130—133. §. der Geom. 288—292. S. vom Berührungswinkel vorgetragen habe: sonst würden mir die aus seinen Elementen der Mathematik hier angeführten Stellen noch weit mehr Befremdung verursachen.

Nach dem Zusatz beym 2. §. der Differentialrechnung a.a.O. 371. S. ist $\frac{1}{\infty}$ ein unendlich kleiner Theil der Grösse 1, und ein wirkliches Nichts. Bey dem allen wird dieses wirkliche Nichts, eben so wie das ∞, welches wie die Tangente des rechten Winkels unendlich groß ist, quantitas omni *dabili* maior, (§. 2. a.a.O.) im 3. §. mit n wieder multiplicirt, es wird auf Potenzen erhoben, kurz hier giebt es so viele unendlich kleine (mithin soviele wirk-

wirkliche Nichtse,) und unendlich grosse, als endliche Grössen, hier giebt es unzählig viele Ordnungen des Unendlichkleinen (also des wirklichen Nichts) und Unendlichgrossen, und am Ende soll die Metaphysik erst untersuchen, ob auch dergleichen Potenzen des Unendlichen etwas unmögliches seyn mögten. Hat denn die Mathematik selbst keine Gründe, nach welchen sie eine solche Prüfung anstellen kann? Die Metaphysik hat der Mathematik bisher schlechte Dienste geleistet; sie hat so wie diese lehren vom Unendlichen noch mehr andre lehren eben recht ins Dunkle eingehüllet: Aufklärungen in der Mathematik, welche wir der Metaphysik zu danken hätten, sind mir gar nicht bekannt. Uebrigens verstehet es sich von selbst, daß eine aufgeklärte Metaphysik ihren Werth so gut habe, als eine aufgeklärte Mathematik: jede dieser Wissenschaften muß aber in ihren Gränzen bleiben. So wenig als mathematische Vorstellungsarten für die Metaphysik gehören, so wenig gehören metaphysische für die Mathematik.

II.

Von

den Parallellinien,

und

den neuern Bemühungen,

die Theorie davon zu ergänzen.

II.

1. §.

Beym Antritt meiner jetzigen Lehrerstelle in Halle, im Jahr 1778, ließ ich unter dem Titel, Versuch einer völlig berichtigten Theorie von den Parallellinien, eine kleine Schrift drucken, worin ich meine Gedanken darüber vortrug, auf welchem Wege die bekannte Schwierigkeit bey dieser Lehre am besten dürfte gehoben werden können. Mir sind seit der Zeit auch einige andre hieher gehörige ähnliche schriftliche Aufsätze bekannt worden. Weil ihr Inhalt mich aber immer noch weniger befriediget, als das, was ich selbst in der angeführten kleinen Schrift darüber aufgesetzt habe; so mag auch diese in Gestalt einer zweyten Auflage hier wieder mit auftreten. Mit Weglassung des Einganges, den die erste Auflage als Ankündigung meiner damahls anzustellenden Vorlesungen hatte, lasse ich sie hier mit einigen nöthig befundenen Veränderungen und Zusätzen wieder abdrucken: denn ich bin bis jetzt noch davon überzeugt, daß die Gründe, worauf ich diese Lehre zurück zu führen bemühet gewesen bin, grade diejenigen sind, worauf es hier vornemlich ankommt. Wenn gleich der Weg, welchen ich genommen habe, vielleicht nicht der einzige richtige seyn möchte; so ist er doch nach meiner bisherigen Ueberzeugung noch der beste und richtigste, den ich kenne.

2. §.

Unter andern Vortheilen rühmt man von der reinen oder theoretischen Mathematik auch diesen, daß sie eine vorzüglich gute Uebung des Verstandes sey, und sie ist wirklich eine beständige Anwendung der Regeln der Vernunftlehre Einige nicht recht günstig scheinende Urtheile von der Logik, die zum Theil Männer von grossen Einsichten hie und da in ihren Schriften geäussert haben, könnten diese Wissenschaft in den Verdacht bringen, als

wäre der gröſste Theil ihrer Lehren wenig oder gar nicht brauchbar; wenn man nicht wüſte, daß nicht so sehr die Wissenschaft selbst, als vielmehr nur dieses oder jenes Lehrbuch gemeint sey. Der natürliche Verstand kann bey den Uebungen in der Geometrie sich die Regeln der wissenschaftlichen Logik selbst abstrahiren, und Logik lernen, ohne eben des Unterrichts nach einem logischen Handbuche zu bedürfen. Die Fertigkeit im richtigen Urtheilen und Schliessen, im ordentlichen und zusammenhängenden Denken, erwirbt sich der selbst denkende Geometer grade so, wie es die besten Lehrer der Vernunftlehre haben wollen, und der ganze Inbegriff der Maximen, nach welchen derselbe bey seinen Untersuchungen zu Werke gehet, in gehörige Verbindung gebracht, ist künstliche Logik. Herr Gesner mag übrigens in der Hauptsache Recht behalten, (Primae lineae Isagoges in eruditionem vniuersalem Tom. II. §. 1012. u. f.) wer nichts als Vernunftlehre studiren wollte, der würde am wenigsten das werden, was er zu werden wünscht. Je mehr Sachen dagegen der Philosoph studirt, je natürlicher die Verbindung ist, worin er die Gegenstände seiner Untersuchungen zusammen ordnet, je schärfer und deutlicher er die Grundbegriffe entwickelt, wovon alles abhängen soll; desto besser wird er das Brauchbare und Unbrauchbare der logischen Regeln, die man in den Lehrbüchern findet, unterscheiden lernen. Ich bin indessen doch sehr davon überzeugt, daß ein wissenschaftlicher Vortrag der Vernunftlehre nicht allein nützlich, sondern auch sehr nothwendig sey, wofern wir in unsern Untersuchungen gewiß und sicher gehen wollen. Man stöſst doch zuweilen auf Stellen in den Schriften sehr geübter Geometer, die eben darum sehr befremden, weil sie mit sehr allgemein als richtig anerkannten logischen Regeln sich nicht wohl vereinbaren lassen.

3. §.

3. §.

Die bekannte Schwierigkeit in der Lehre von den Parallellinien, welche bisher bey allen Bemühungen, für den eilften Grundsatz beym Euklides einen völlig scharfen Beweis zu suchen, noch nicht (zur allgemeinen Befriedigung) gehoben ist, scheint ein merkwürdiges Beyspiel davon zu seyn, wie wenig Hülfe man von der Vernunftlehre sich zu versprechen habe: denn es ist gewiß, daß uns die Regeln von der Conversion allein hier nicht aushelfen können. In den Anfangsgründen der Geometrie, einer Wissenschaft, die ein Vorbild der vollkommensten Lehrart zu seyn behauptet wird, sollte eine Schwierigkeit seit des Euklides Zeiten noch immer übrig seyn, die sich gar nicht heben liesse! Das in meinen geometrischen Lehrstunden zu sagen, ist mir immer schwer geworden. Dennoch habe ich schon ehedeß einen Versuch gemacht, der nicht glücklicher ausgefallen ist, als die Versuche meiner Vorgänger. Die bekannte Disputation: Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio, welche der jetzige Helmstädtsche Herr Professor Klügel im Jahr 1763 zu Göttingen verfasset, und unter Herrn Hofrath Kästners Vorsitz vertheidiget hat, überhebt mich der Mühe, die Geschichte aller hieher gehörigen Bemühungen andrer Schriftsteller zu erzählen: unter welchen Versuchen, die daselbst angeführt sind, ist keiner völlig gelungen. Mein neuerer Versuch war das auch noch nicht völlig, was ich wünschte: indessen läßt sich vielleicht das, was ich dabey zum Grunde gesetzt habe, in noch einfachere Sätze auflösen. Mehrere Männer; deren Nahme, wenn es nöthig wäre, sie zu nennen, der Sache kein geringes Gewicht geben würde, haben mir, theils ihren ganzen Beyfall bezeuget, theils hie und da noch etwas mehr Aufklärung verlangt: ich werde im folgenden ihre Erinnerungen zu nutzen suchen.

4. §.

Das kann man mit dem Euklides scharf beweisen: Zwo grade Linien, die, wenn sie von einer dritten geschnitten werden, mit ihr zwo innere Winkel einschliessen, deren Summe zwey rechte Winkel ausmacht, sind parallel. Die Logik sagt: ein bejahender allgemein wahrer Satz kann vermittelst einer einzigen unmittelbaren Folge, wenn man sonst keine Gründe hat, umgekehrt und allgemein ausgedrückt nicht als ein wahrer eben durch die Umkehrung bewiesener Satz gelten. Hat man einigen Grund, zu vermuthen, daß der durch die Umkehrung sich ergebende Satz auch allgemein wahr sey; so muß man einen eigenen Beweis des Satzes suchen. Wie man sich hiebey verhalten soll, dazu kann man aus der logischen Lehre von der Umkehrung der Sätze keine Anleitung hernehmen wollen: denn diese soll nur ins licht setzen, auf welche Art es erlaubt sey, oder nicht erlaubt sey, einen Satz umzukehren, wenn man sich allein durch die Umkehrung versichert halten will, daß der so herauskommende Satz, als Schlußsatz betrachtet, wahr sey, wenn der erste, aus dessen Umkehrung er entstanden ist, als Prämisse betrachtet, als wahr zugestanden wird. Demnach ist wohl kein Mangel in der logischen Conversionslehre Schuld daran, daß man mit der Schwierigkeit in der Lehre von den Parallellinien noch nicht fertig geworden ist.

5. §.

Der umgekehrte Satz lautet so: Parallele Linien machen mit jeder dritten graden Linie, die alle beyde schneidet, zwey innere Winkel, deren Summe zwey rechte Winkel beträgt. Daß der Satz als ein besonderer Satz ausgedrückt wahr sey, davon ist man allein durch die Conversion als durch eine unmittelbare Folge versichert. Man will aber einen Beweis davon haben, daß der Satz allgemein ausgedrückt wahr sey. Die Prämisse sey, um

mich

mich kurz zu fassen: Alles A ist B, so folgt durch die Umkehrung der Schlußsatz: Einiges B ist A. Wofern aber auch bewiesen werden kann: Alles, was nicht A ist, das ist auch nicht B, so ist damit zugleich bewiesen: Alles B ist A. Denn wäre nun einiges B nicht A, so wäre auch einiges B nicht B, welches ein Widerspruch ist. Nach einer andern Conversionsregel, welche ich mit dem Hrn. von Segner die Umkehrung per contrapositionem nenne, folgt auch unmittelbar aus dem Satze

Alles, was nicht A ist, das ist auch nicht B,

umgekehrt

Alles B ist A.

Wenn nemlich ein Satz allgemein wahr ist, so folgt von selbst, wo das Prädicat nicht ist, daß auch da das Subject nicht seyn könne. (M. s. Io. Andr. Segneri Specimen Logicae uniuersaliter demonstratae Jenae 1743. Prop. XXV. Cor. IV - VI. mit dem Schol. I. pag. 89. 90.)

So weit die Logik in der Conversionslehre: vermittelst der Conversionsregeln weiter zu führen, ist ihre Pflicht nicht. Das übrige muß man aus der Lehre hernehmen, die dazu Anleitung giebt, wie man sich verhalten muß, um den Beweis eines Satzes zu finden. Meine Absicht ist nicht, auf die dahin gehörigen Lehren mich weiter einzulassen, und hier darüber ein Urtheil zu fällen, wie weit das alles befriedigend sey, was man davon in den logischen Lehrbüchern findet. Das allgemeine der Sache kommt darauf an, daß man die Begriffe des Prädicats und Subjects in einfachere Begriffe zergliedern muß. Mit dieser Zergliederung muß man fortfahren, bis man auf ganz einfache Grundbegriffe kommt, wenn alle Versuche fruchtlos ablaufen, aus Vergleichung des zu erweisenden Satzes mit andern vorher schon bewiesenen, oder sonst zugestandenen Sätzen, auf eine Reihe von Schlüssen zu kommen, darin der Satz selbst, wovon die Frage ist, richtig als der letzte Schlußsatz heraus kommt.

6. §.

Euklides geht in der Sache nur so weit, als ihn die Conversionslehre hat leiten können. Hat man es bewiesen, oder wird der Satz als ein wahrer Satz zugestanden: grade Linien, die mit einer dritten, welche beyde schneidet, zwey innere Winkel einschliessen, die nicht zwey rechte Winkel zusammen ausmachen, sind nicht parallel; so ist die ganze Schwierigkeit gehoben. Weil Euklides, wie es scheint, keinen Beweis dieses Satzes zu geben gewußt hat, so nimmt er ihn als einen Grundsatz an. Sein XIter Grundsatz ist mit jenem Satz an sich einerley; er setzt nur statt des Worts nicht parallele Linien das gleichgültige, zusammenlaufende: und weil bey der Voraussetzung des Satzes die Summe der innern Winkel an einer Seite mehr, an der andern weniger als zwey rechte Winkel beträgt, so drückt er zugleich mit aus, daß die Linien auf der Seite zusammen laufen, wo die beiden Winkel liegen, deren Summe weniger als zwey rechte Winkel beträgt.

7. §.

In der ersten Ausgabe der oben im 1. §. angeführten kleinen Schrift war nach dem siebenten Satze die nachstehende Stelle eingeflossen.

„Wer mir die sechs ersten Sätze als Grundsätze eingeräumt hat, der ist schon genöthiget, den siebenten als eine Folge daraus gelten zu lassen. Dann aber wird er auch genöthiget seyn, alles folgende als eine scharf bewiesene Theorie von den Parallellinien mit mir anzunehmen. Wer dagegen die ersten Sätze nicht für befriedigend hält, mit dem kann ich darüber nicht weiter disputiren. Mit einem solchen Gegner, welcher die Sätze für keine befriedigende Grundsätze hielte, daß ausgedehnte Grössen, die auf und in einander passen, und grade Linien nur alsdenn, wenn sie auf einander passen, gleich groß sind, wür-

würde doch wohl niemand sich in einen Streit darüber einlassen. Ich wenigstens würde ihm gern seine Freyheit lassen, die ganze Geometrie für eine Sammlung unerwiesener Sätze zu halten, so lange bis er von selbst geneigt wäre, die erwähnten Sätze als Grundsätze mit mir anzunehmen. „

In dieser Stelle habe ich meine Gedanken über gewisse Regeln, die man bey philosophischen Untersuchungen als nothwendig zu befolgende vorzuschreiben gewohnt ist, etwas zu kurz zusammen gefaßt. Ich glaubte, daß diese kurzen Bemerkungen dem im Denken selbst geübten Leser genügen würden: jetzt aber scheint es mir zweckdienlich zu seyn, daß ich mich etwas umständlicher darüber erkläre. In der Vorrede des Hrn. von Segner zur Uebersetzung der ersten VI. Bücher des Euklides, die H. Lorenz im Jahr 1773 herausgab, befindet sich eine ähnliche Stelle. Die Rede ist daselbst von einem Grundsatze, und es wird hinzugesetzet:

„ich kann nicht versprechen, daß bey der so sehr verschiedenen Denkungsart der Menschen derselbe einem jeden andern in eben dem Lichte erscheinen werde, in welchem er sich mir zeiget.„

8. §.

Seitdem Herr von Wolf auf die Natur einer richtigen philosophischen Lehrart, die man eine zeitlang auch im besondern Sinne die mathematische Lehrart nannte, mehr aufmerksam gemacht hat, geben logische und mathematische Schriftsteller die Regel: „man müsse den Vortrag in Wissenschaften mit richtigen Erklärungen und einem jeden ohne Beweis einleuchtenden Grundsätzen anfangen.„ Die Regel selbst wird wohl jeder als richtig anerkennen: nur hat vielleicht mancher Schriftsteller sie niedergeschrieben, auch mancher Lehrer in philosophischen oder mathematischen Lehrstunden sie vorgetragen, ohne zu

bedenken, oder dabey zu erinnern, daß dasjenige, was die Regel nach dem gewöhnlichen Sinne der Worte fodert, nicht allemahl schlechthin geleistet werden könne. Die Regel fodert

1) richtige Erklärungen,
2) für sich einleuchtende Grundsätze: über beydes werden einige Bemerkungen folgen.

9. §.

Eine Erklärung soll ein mit Worten vorgetragener vollständig deutlicher Begriff der zu erklärenden Sache seyn: ein Begriff aber kann alsdenn nur ein deutlicher Begriff heissen, wenn der denkende Verstand mehrere Merkmahle wahrnimmt, woran die Sache erkannt und von andern unterschieden werden kann. Es muß also jedes Merkmahl für sich als ein von jedem der übrigen verschiedenes Merkmahl gedacht, und eben darum auch ein jedes für sich durch ein geschickt gewähltes, oder sonst schon bekanntes Wort bezeichnet werden können. Wenn alle diese Merkmahle zusammen genommen hinlänglich sind, die Sache zu aller Zeit und unter allen Umständen von allen andern zu unterscheiden, so ist der Begriff vollständig deutlich, und wenn er mit Worten vorgetragen wird, so ist es eine logische Erklärung.

10. §.

Begriffe, wovon in theoretischen Wissenschaften die Rede ist, sind gröstentheils, wo nicht insgesammt, allgemeine Begriffe, wozu wir vermittelst der logischen Abstraction gelangen. Wir trennen in Gedanken die Merkmahle, wodurch einzelne Dinge, Arten, und Gattungen von einander unterschieden werden, von den übrigen Merkmahlen, die sie mit einander gemein haben; wir lassen die sogenannten individuellen und specifischen Unterscheidungsmerkmahle weg, und stellen uns diejenigen allein im Verstande vor, welche einzelne Dinge, Arten und

Re=

Nebengattungen mit einander gemein haben: so gelangen wir zu allgemeinen Begriffen, deren Allgemeinheit desto grösser wird, je weniger gemeinschaftliche Merkmahle nach Trennung der Unterscheidungs = Merkmahle übrig bleiben. Vielleicht bleibt endlich nur ein einziges Merkmahl in unsrer Vorstellung übrig, das einer sehr grossen Menge von Arten und Nebengattungen gemein ist: der so sehr allgemeine Begriff ist nun ein einfacher Begriff, wogegen jeder Begriff noch ein zusammengesetzter Begriff heissen kann, wenn sich der Verstand mehr als ein mehrern einzelnen Dingen, Arten, oder vielleicht Nebengattungen, gemeinschaftliches Merkmahl vorstellet.

11. §.

Die ersten und allgemeinsten Begriffe in theoretischen Wissenschaften, ihre Grundbegriffe, sind wenigstens zum Theil ganz einfache Begriffe, und es ist von guten philosophischen Schriftstellern längst angemerkt worden, daß man von dergleichen einfachen Begriffen in dem vorhin angezeigten Sinne keine logische Erklärung geben könne. Wenn der Verstand nur ein Merkmahl denkt, wenn vielleicht die Sprache nur ein oder höchsteus zwey an sich einerley bedeutende Wörter hat, um das wenige was in der Vorstellung nach Trennung alles übrigen zurück geblieben ist, auszudrücken; so ist der Begriff keiner Deutlichkeit fähig: er kann nur ein klarer vielleicht ein sehr lebhaft klarer Begriff seyn. Nur zusammengesetzte Begriffe kann der Verstand deutlich denken, und wenn für verschiedene Merkmahle der Sache, die sich der Verstand auch als verschieden vorstellet, die Worte als Zeichen geschickt gewählt werden; so wird der daraus zusammen gesetzte symbolische Ausdruck das, was eigentlich eine logische Erklärung seyn soll. Die Begriffe von dem, was eine Anzahl, was im allgemeinsten Sinne eine Grösse sey, was Gleichheit und Ungleichheit, was Ausdehnung

nung und Raum sey, Gränze, Lage, Richtung, selbst von dem was eine grade Linie sey? (H. von Segner sagt: quae linea *Recta* dicitur, notum est. Cursus Math. P. 1. Geom. §. 3. pag. 142. Man vergleiche auch H. H. Kästners Anfangsgr. d. Arithm. Geom. und Trig. die 6 Erkl. der Geom. mit der beygefügten Anmerkung.) sind so sehr einfach, daß alle Bemühungen, davon Erklärungen zu geben, vergeblich sind. Alle diese Begriffe sind an sich sinnlich klar, je mehr der Verstand veranlasset wird, an das zu denken, was die eben angeführten Wörter als Zeichen dieser Begriffe sagen wollen, desto grösser wird ihre sinnliche Klarheit: aber zur Deutlichkeit lassen sie sich nicht bringen. Ich würde sie bey dem allen aber doch nicht verwirrte Begriffe nennen, wenn verwirrt so viel als undeutlich heissen soll, wenn sich anders der Verstand das, was das Wort bezeichnet, richtig vorstellt, dasjenige nemlich, was nach Absonderung alles dessen übrig bleibt, was nach dem gemeinen oder wissenschaftlichen Sprachgebrauch das Wort nicht mit ausdrücken soll. Zusammengesetzte Begriffe können entweder deutlich oder undeutlich seyn: einfache Begriffe eigentlich keines von beyden.

12. §.

Es ist leicht gesagt, daß die Wahrheit eines Grundsatzes einem jeden, der nur die Sprache verstehet, worin er vorgetragen wird, für sich schon einleuchtend seyn müsse. Wenn man aber die allgemein für solche schon anerkannten Grundsätze der Geometrie, und wenige andre ausnimmt; so geben sich bey der Feststellung eines neuen sonst eben noch nicht gebrauchten Grundsatzes gewöhnlich ganz eigene Schwierigkeiten hervor, wenn man das für sich einleuchtend seyn im strengsten Sinne nehmen will. Es würde mich zu weit von meinem jetzigen Zweck abführen, wenn ich Beyspiele davon aus andern Wissenschaf-

ten

ten hernehmen wollte: deßwegen schränke ich mich allein auf solche ein, die aus der Geometrie hergenommen sind. Gewöhnlich fodert man, ein Grundsatz müsse in einer vorher schon vorgetragenen Erklärung mit enthalten seyn, oder durch eine leichte Schlußfolge daraus hergeleitet werden können: wie aber, wenn der Begriff, wovon in dem Grundsatze die Rede ist, ein sehr allgemeiner ganz einfacher Begriff ist, wovon man keine eigentliche Erklärung geben kann? (15. §.) Wie wenn man die Grundsätze beym Archimedes im I. Buch de Sphaera et Cylindro jener Foderung gemäß beurtheilen wollte, und wenn auch nur der einzige Satz: daß die grade Linie die kürzeste zwischen zweyen Puncten sey, einer solchen Prüfung unterworfen werden sollte; würde man ihm das für sich einleuchtende im strengsten Verstande wohl zugestehen?

13. §.

Bey dem allen wird der zuletzt erwehnte Satz ohne Bedenken, so viel ich weiß ganz allgemein als Grundsatz angenommen, wenn man auch die übrigen Sätze, welche Archimedes a. a. O. ohne Beweis annimmt, nicht schlechthin als eben so einleuchtende anerkennet. Ja man prüfe Euklids 8ten Grundsatz im 1 Buche eben so: ausgedehnte Grössen, die auf- und in einander passen, (einander decken, congruiren, wie man es auch ausdrücken will) sind gleich groß. Wie wenn der Zweifler foderte, man müsse vor allen Dingen eine Erklärung davon geben, was congruiren heisse, ferner eine Erklärung von dem was gleich oder ungleich sey, hiernächst müsse man deutlich zeigen, daß das Prädicat der Gleichheit in dem eigenthümlichen des Congruirens gegründet sey, und das entgegen gesetzte Prädicat der Ungleichheit dem Congruiren widerspreche. Der Begriff, welchen das Wort congruiren ausdrücken soll, läßt sich ziemlich deutlich darstellen, nicht so gut der ganz allgemeine Begriff der

Gleich-

Gleichheit. Selbst das Congruiren, (zwischen einerley Gränzen enthalten seyn) ist das ganz eigenthümliche am meisten einleuchtende Kennzeichen der Gleichheit ausgedehnter Grössen. Eben darum ist Euklids 8ter Grundsatz so ganz kurz ausgedrückt, wie er a. a. O. stehet, einleuchtender als jeder Beweis, den man davon zu geben versuchen mögte. - Bey den ersten geometrischen Grundsätzen kommt alles auf solche sinnlich-klare Begriffe an, die man sonst auch notiones communes nennt, die uns eben darum auch ganz geläufig sind, weil wir im gemeinen Leben in sehr vielen Fällen davon Anwendungen gemacht haben. Grade dieser Umstand trägt das meiste dazu bey, wenn uns ein Grundsatz recht sehr einleuchtend zu seyn scheinet. Ein Satz, der auf Begriffen beruhet, die uns nicht so geläufig sind, scheint uns eben darum nicht so ganz einleuchtend zu seyn, wenn wir gleich die Wahrheit desselben an sich nicht bezweifeln. Man vergleiche den Grundsatz, wovon H. von Segner in der körperlichen Geometrie, um die Beweise zu verkürzen, Gebrauch gemacht hat, (M. s. auch meinen Auszug aus den Anfangsgr. und dem Lehrb. der Math. Wiss. im 296. 297. §. Geom. 156. S. d. 2 Ausg.) mit dem Grundsatze der Congruenz; so wird man diese Bemerkung völlig gegründet finden. Gleich hohe Körper auf gleichen Grundflächen sind gleich groß, wenn überdem die mit den Grundflächen parallelen Schnitte dieser Körper in gleichen Höhen über den Grundflächen allemahl gleich groß sind. Um diesen Segnerischen Grundsatz auch nur zu verstehen, muß man selbst durch die Geometrie schon vorbereitet seyn, er setzt wissenschaftliche Begriffe voraus: den Grundsatz der Congruenz verstehet jedermann, wenn er nur mit der Sprache bekannt ist, worin der Satz vorgetragen wird. Er beruhet auf keinen andern Begriffen, als auf solchen, die man notiones communes nennet: Dinge, die auf- und ineinander passen, sind gleich groß.

14. §.

14. §.

Wenn ich indessen den Euklideischen und andern bisher als völlig einleuchtend anerkannten Grundsätzen ihre Evidenz gern zugestehe; so scheint mir doch das vorzügliche der Methode der alten Geometer, wovon man immer so sehr viel Rühmens gemacht hat, nicht so sehr darauf zu beruhen, daß ihren Grundsätzen eine vollkommene Evidenz zugestanden werden muß; sondern vielmehr darauf, daß sie von diesen Grundsätzen einen so vortheilhaften Gebrauch zu machen wusten. Das Methodische in der Verbindung aller zu ihrer Wissenschaft, oder zu einer besondern Theorie, die sie ins licht setzen wollten, gehörigen lehren, das Einleuchtende in der Art und Weise wie sie die Lehrsätze und Aufgaben mit den Grundsätzen und Foderungssätzen in Verbindung zu bringen wusten, ist es eigentlich, was vornemlich Bewunderung und Nachahmung verdienet. Es ist das, was nach dem Cicero von der Geometrie gilt: In Geometria si dederis, omnia danda sunt. Wenn man die Sache aus einem solchen Gesichtspuncte betrachtet, so war Euklides vollkommen berechtiget, seinen XI. Grundsatz im ersten Buche ohne Beweis anzunehmen. Vielleicht hatte er mehr als einen fruchtlosen Versuch gemacht, einen Beweis des Satzes aus den übrigen von ihm angenommenen Grundsätzen zu folgern; dabey schienen ihm vermuthlich die in solcher Absicht nöthigen Untersuchungen verwickelter und weniger einleuchtend, als der Satz selbst: also überließ er es einem jeden, ob er den Satz mit dem, was davon weiter abhängt, einräumen wolle oder nicht. Ohne Zweifel würde er einem jeden, der ihm entgegen gesetzt hätte, daß der Satz nicht befriedigend sey, erwiedert haben, daß seine Geometrie auch nur unter der Bedingung eine strenge bewiesene Wissenschaft sey, wofern der bezweifelte Satz richtig sey, übrigens aber wisse er ihn zur Zeit nicht weiter einleuchtend zu machen. Grade das ist es auch, was ich zu erkennen

geben

geben wollte, als ich die oben im 11. §. bemerkte Stelle niederschrieb. Der Foderung, daß kein Grundsatz auf andern Begriffen, als auf solchen beruhen müsse, die man notiones communes (gemeinfaßliche Begriffe) nennt, kann nicht allemahl schlechthin ein Genüge geleistet werden. Es giebt auch ganz einfache wissenschaftliche Grundbegriffe, die uns eben darum nicht so gemeinfaßlich scheinen, weil wir im gemeinen Leben nur selten, oder vielleicht nie Veranlassung gehabt haben, nach diesen Begriffen zu urtheilen und zu schliessen. Eben darum können sie uns nicht so geläufig seyn, als andre, die wir bey den täglichen Geschäften des gemeinen Lebens häufig anwenden. Wenn jemand beym wissenschaftlichen Vortrage Grundsätze dieser Art annimmt, so kann und muß man eigentlich nicht darüber disputiren, ob sie als Grundsätze gelten können, oder nicht, weil sie dem einen einleuchtend scheinen können und dem andern nicht. Die Hauptsache, welche zur Frage kommt, ist allemahl diese, ob alles übrige aus den angenommenen Grundsätzen richtig sey gefolgert worden. Archimedes a. a. O. ist unbesorgt darüber, ob man seine assumta werde gelten lassen, oder nicht: es heißt bey ihm λαμβάνω δὲ τάυτα.

15. §.

Man fället indessen doch über alle andre Grundsätze, worauf Euklides seine Geometrie gebauet hat, einstimmig das Urtheil, daß sie als für sich einleuchtende Grundsätze zugestanden werden müssen: also bleibt es für die Wissenschaft immer merkwürdig, daß man den XIten Grundsatz im 1sten Buche nicht so einleuchtend als die übrigen gefunden hat. Noch mehr muß es befremden, daß bey so vielen Bemühungen, den Satz als Lehrsatz zu beweisen, noch keine völlig hat gelingen wollen, da man doch mit andern Untersuchungen, die weit mehr Schwierigkeit zu haben scheinen, sehr glücklich zu Stande gekommen ist.

Weil

Weil ich selbst sehr viele Wege gesucht habe, um auf einen Beweis zu kommen, der allein von solchen Grundsätzen abhängen sollte, die man allgemein als für sich einleuchtende gelten lässet, und weil ich dabey allemahl gefunden habe, daß immer eine nöthige Bestimmung fehle, man mag die Art zu schliessen, wie man will einleiten; so bin ich bis jetzt noch davon überzeugt, daß man sich entweder alle fernere Mühe ersparen könne, einen Beweis zu suchen, der einen jeden befriediget, weil sie nach aller Wahrscheinlichkeit vergeblich seyn würde; oder daß man suchen müsse, der Sache auf dem Wege näher zu kommen, welchen ich in der kleinen oben angezeigten Schrift betreten habe. Hätte Euklides auf diese oder eine ähnliche Art die Gründe zu dem Beweise vorbereitet; hätte er die Begriffe von dem, was Lage einer graden Linie in einer Ebene, und was Identität oder Verschiedenheit der Lage mehrerer graden Linien in einer Ebene sey, zum voraus in der Form von Erklärungen oder Grundsätzen beygebracht: so würden wir, wie es mir sehr wahrscheinlich vorkommt, jetzt alles so evident finden, als den übrigen Vortrag beym Euklides. Man würde sich gleich bey den ersten Uebungen in den Anfangsgründen an diese Begriffe gewöhnen, und weiter keinen Anstoß dabey finden.

16. §.

Bey einer solchen Untersuchung, wovon hier die Rede ist, kommt es oft nicht so sehr auf die Sätze selbst, als vielmehr auf die Ordnung an, in welcher man sie zusammenstellet. In einer andern Verbindung können sie vielleicht in einem ganz andern Lichte erscheinen, wenn bey dem ersten Versuch noch nicht die beste Verbindung getroffen ist. Ausserdem kommt auch vieles auf die gewählten Ausdrücke an. Wenn diese nicht so getroffen sind, daß wenigstens der gröste Theil sachkundiger leser mit den Ausdrücken eben die Begriffe verbindet, die der Schrift-

steller damit verbunden hat; so ist die Zustimmung des Lesers nicht zu erwarten. Ich will also versuchen, theils noch den Ausdruck etwas zu verändern, so wie es mir nun der Sache am gemäßesten zu seyn scheinet, theils auch die Sätze, welche ich in meinem ersten Versuch zum Grunde geleget hatte, in eine vielleicht noch bessere Verbindung zu bringen. Nur muß es mir erlaubt seyn, mit Archimedes zu sagen: λαμβάνω δὲ τᾶυτα. Von der lage der graden linien und von Identität oder Verschiedenheit ihrer lage ist die Rede, nicht von Vergleichung ihrer Grösse: also muß die Sache auf die einfachsten Vorstellungen von dem zurück geführet werden, was das heisse, eine grade linie habe diese oder jene lage. Logische Erklärungen von so sehr einfachen Begriffen, die noch überdem eben so gut als die Begriffe von Raum und Ausdehnung sinnliche Begriffe sind, kann man nicht fodern: nur aus der Art, wie wir sonst zu urtheilen gewohnt sind, wenn von Uebereinstimmung oder Verschiedenheit der lage grader linien die Rede ist, kann man das abstrahiren, worauf wir unser Urtheil in solchen Fällen gründen, wenn es zur Frage kommt, ob grade linien in einer Ebene eine übereinstimmige oder verschiedene lage haben. Sätze, welche das auf eine leichtfaßliche Art ausdrücken, können hier als Grundsätze gelten.

Entwurf einer Theorie von den Parallellinien.

17. §.

Wenn man sich allein an das einzige Merkmahl des Zusammenlaufens oder Nichtzusammenlaufens, des Schneidens oder Nichtschneidens, zweyer grader linien in einer Ebene halten will; so kann man wenigstens die nachstehenden völlig einleuchtenden Kennzeichen der nicht parallelen lage festsetzen.

1) Wenn

1) Wenn zwey Puncte C, D, mit der graden Linie AB in einerley Ebene befindlich sind, C aber an der einen und D an der andern Seite von AB liegt, so leidet es keinen Zweifel, daß AB von der graden Linie, welche C und D verbindet, werde geschnitten werden. 10. Fig.

2) Auch jede grade Linie, die durch einen Punct D innerhalb der Gränzen einer ebenen gradlinichten Figur ACE läuft, schneidet den Umfang dieser Figur wenigstens in zweenen Puncten. Wenn also die Figur ein gradlinichtes Dreyeck ist, und die durch D gezogene grade Linie auch durch die Spitze C eines Winkels läuft, so schneidet sie verlängert gewiß die gegenüberstehende Seite AE. 11. Fig.

3) Wenn nun die Summe der Winkel CAB + ACD < 2 R ist; so kommt alles darauf an, ob aus der gegebenen Seite AC und dem anliegenden Winkel CAB ein Dreyeck so gezeichnet werden könne, daß der andre anliegende Winkel, dessen Spitze C werden muß, eben so groß oder noch grösser als ACD werde. In beyden Fällen bleibt kein Zweifel übrig, daß AB und CD verlängert einander schneiden müssen.

18. §.

Soviel weiß man, daß grade Linien in einer Ebene nicht parallel sind, wenn sich nur ein Punct angeben läßt, der in beyden zugleich liegt, nicht mehrere. Wenn ferner parallele Linien von völlig zusammenfallenden unterschieden seyn sollen; so muß es in der Ebene gar keinen Punct geben, der in beyden zugleich liegt. Durch einen gegebenen Punct E allein können also mehrere nicht parallele grade Linien laufen, und man kann nicht wissen, von welcher unter diesen mehrern die Rede sey, wofern nicht ausser E noch ein Punct B gegeben wird. Nun kann man sagen, es sey die grade Linie gemeint, welche sich von E nach B erstreckt, die in der Richtung von E 10. Fig.

nach B liegt. Kurz: nun ist die Lage der graden Linie EB gegeben (Kästners Anfangsgr. 1 Th. Geom. 1 Foderung, 169 S. der 3. Aufl.)

19. §.

Von der graden Linie können wir kein andres eigenthümliches Merkmahl angeben, als daß alle ihre Puncte nach einer Gegend zu liegen, (a. a. O. Geom. 6. Erkl. 162. S.) Wenn also auch F in EB liegt, so liegen B und F von E aus nach einer Gegend, oder die Lage EB ist mit der Lage EF eine und eben dieselbe; EB, EF, liegen von A aus in einerley Richtung. Jeder Theil einer graden Linie erstreckt sich also vom Anfangspunct aus mit der ganzen nach einerley Richtung, und die Lage einer graden Linie, die man durch E ziehen soll, ist gegeben, wenn ausser E noch ein Punct gegeben ist, durch welchen die grade Linie fortgezogen werden soll. Wofern zugleich E der Anfangs- und B der Endpunct seyn soll; so ist zugleich ihre Grösse gegeben.

10. Fig.

20. §.

Wenn der Punct D nicht in EB liegt, so erstreckt sich ED nicht mit EB nach einerley Richtung, oder ED liegt in einer von EB verschiedenen Richtung. Zwey nicht parallele Linien erstrecken sich also von ihrem Durchschnittspunct aus nach verschiedenen Richtungen. Die Lage ED ist zwar eben so, wie die Lage EB gegeben, weil aber D nicht in EB liegt, so ist die Lage ED von der Lage EB verschieden. Bey einiger Aufmerksamkeit auf das, was man in Gedanken hat, wenn die Redensart gebraucht wird, eine grade Linie habe diese oder jene Lage, wird man finden, daß man allemahl wenigstens an einen Punct, als an einen gegebenen oder sonst bekannten Punct denken müsse, und daß man sich die mehrern möglichen Lagen um diesen Punct herum vorstelle. Wird

10. Fig.

das

das Wort Richtung gebraucht, so hat man einen Punct in Gedanken, wo die Richtung anfangen, und einen andern, wohin sie sich erstrecken soll. Die Stelle für den Punct, wo die Richtung anfangen soll, denkt man sich ebenfalls als gegeben, oder sonst bekannt; die Stelle des andern Puncts, wohin sich die Richtung erstrecken soll, bleibt in soweit unbestimmt, in wie weit es ganz gleichgültig ist, ob diese dem Anfang der Richtung nahe, oder vielleicht sehr weit davon entfernt sey.

21. §.

Wenn AEF eine grade Linie ist, so ist es nicht ungewöhnlich zu sagen, die Lage EA sey der Lage EF entgegen gesetzt; es scheint aber, daß man richtiger sagen müste: EA und EF erstrecken sich von E aus nach entgegen gesetzten Richtungen. Die Lage AF ist schon gegeben, wenn ausser E noch ein Punct B gegeben ist, B mag seine Stelle haben wo man will: die Richtung EB aber hängt davon ab, ob B an der einen oder an der andern Seite von A zur Rechten oder zur linken befindlich seyn soll. Die Richtung von E nach A ist der Richtung von E nach B entgegen gesetzt. Weil übrigens eine grade Linie ED mit einer andern AF, welche sie in E schneidet, an jeder Seite zwey Nebenwinkel macht, so ist es nöthig, auch diese zu unterscheiden, wenn vom Abweichungswinkel die Rede ist. Der Richtung ED Abweichungswinkel von EF ist FED: aber der Nebenwinkel AED ist der Abweichungswinkel derselben Richtung ED von EA, die der Richtung EF entgegen gesetzt ist. Man kann vom Abweichungswinkel der einen Richtung CD von einer andern AF reden, wenn gleich diese Richtungen von zweenen verschiedenen Puncten C, A, fortlaufen. Wofern nur diese Richtungen gehörig verlängert einander in E schneiden; so ist FED der Richtung CD Abweichungswinkel von der Richtung AF; auch ist GCD der Richtung CD Abwei- 10. Fig.

chungswinkel von der Richtung HG, wenn beyde einander in C schneiden.

22. §.

Die Grösse einer graden Linie wird entweder unmittelbar dadurch gegeben, daß ihr Anfangs- und Endpunct gegeben wird, oder durch ihr Verhältniß gegen eine andre grade Linie von bekannter Grösse. Eben so kann auch die Lage oder Richtung einer graden Linie entweder unmittelbar gegeben seyn, wenn ausser dem Punct, wo die Richtung anfängt, ein andrer gegeben wird, wohin sie sich erstrecken soll, oder durch ihren Abweichungswinkel von der schon bekannten Lage oder Richtung einer andern graden Linie. Jede grade Linie nemlich, die durch A und einen andern Punct C läuft, der nicht in AB liegt, schließt mit AB einen Winkel BAC ein. Wenn also die Lage oder Richtung AB ein für allemahl als gegeben angenommen wird; so ist es einerley, ob ausser A noch der Punct C, oder anstatt des letztern der Winkel BAC gegeben wird. In beyden Fällen ist die Lage AC oder DC (19.§.) bestimmt, und BAC ist der Abweichungswinkel der graden Linie AC von der Lage AB. Durch A kann nun keine von AC verschiedene grade Linie unter eben dem Abweichungswinkel gezogen werden, weil gleiche Winkel in einander passen. Umgekehrt also, wenn die Lage AC mit dem Abweichungswinkel CAB gegeben ist, so ist zugleich die Lage AB gegeben.

12. Fig.

1. Zusatz.

Man kann oft den Abweichungswinkel der einen Richtung AE von der andern DH angeben, wenn gleich diese Richtungen von zweenen verschiedenen Puncten A und D aus fortlaufen. Wofern nur diese Richtungen gehörig verlängert einander in G schneiden; so ist HGE der Richtung AE Abweichungswinkel von der Richtung

DH

DH: auch ist FGE der Richtung AE Abweichungswinkel von der Richtung HG, wenn beyde einander in G schneiden.

2. Zusatz.

Grade Linien EA, HD, die von zweenen verschiedenen Puncten E, H, aus so fortlaufen, daß sie verlängert einander schneiden, haben nicht einerley Lage, oder sie erstrecken sich nicht nach einerley Richtung. (20. §.) Wenn also zwey grade Linien von zweyen verschiedenen Puncten aus sich nach einerley Richtung erstrecken, so können sie einander nicht schneiden.

23. §.

Wenn drey nicht in grader Linie liegende Puncte A, D, G, in einer Ebene gegeben sind; so kann man durch den einen A allemahl eine grade Linie ziehen, deren Lage oder Richtung mit der Lage einerley ist, welche durch die beyden andern Puncte D und G bestimmt wird. 12. Fig.

Beweis. Wenn die Stelle des Puncts A gegeben ist, durch welchen mehr grade Linien in der Ebene ADG in mehrern verschiedenen Lagen laufen; so mag hiernächst auch der Punct D in derselben Ebene, wo man will, gegeben seyn: es ist allemahl völlig einleuchtend, daß man durch D wenigstens eine grade Linie ziehen könne, die sich von D aus mit einer von den durch A laufenden graden Linien völlig nach einerley Richtung erstreckt. Es ist die grade Linie durch D und A, (19. §.) welche über A hinaus nach C soweit man will verlängert werden kann. Weil nun zugleich D gegeben ist, so ist der Abweichungswinkel ADG gegeben: wenn demnach CAB = ADG gemacht wird, so ist die Lage AB völlig so bestimmt, als wenn ausser A noch ein Punct B gegeben wäre. Weil nun AB und DG von einer und eben derselben gegebenen Lage

lage DC um gleiche Winkel CAB, CDG, abweichen, so haben sie in der Ebene ADG einerley Lage.

24. §.

Zwey grade Linien DG, DF, die von einerley Punct D aus nach einerley Richtung, oder in einerley Lage fortlaufen, fallen völlig zusammen; also haben sie nicht allein einerley Lage, sondern auch einerley Stelle. Dagegen können zwey grade Linien von zweyen verschiedenen Puncten aus in einer Ebene sich nach einerley Richtung erstrecken, oder in einerley Lage laufen, ob sie gleich nicht einerley Stelle in der Ebene haben. Wenn zwey Punkte A und B gegeben werden, wodurch eine grade Linie laufen soll, so ist beydes ihre Lage und ihre Stelle gegeben. Dagegen ist nicht zugleich nothwendig ihre Stelle gegeben, wenn ihre Lage gegeben ist. Wäre nur diese allein durch die Puncte D und G in einer bekannten Ebene gegeben, so kann man durch jeden andern nicht in DG liegenden Punct in derselben Ebene eine grade Linie ziehen, die sich mit DG nach einerley Richtung erstreckt, oder mit DG einerley Lage hat.

25. §.

Zwey grade Linien AL, DF, erstrecken sich von den Puncten A und D aus nach verschiedenen Richtungen, wenn ihre Abweichungswinkel von der Lage AD ungleich sind.

Beweis. Wenn die Winkel CAL, CDF, ungleich sind, und CAB = CDF ist, so sind auch CAL, CAB ungleiche Winkel, und die Lage oder Richtung AL ist mit der Lage AB gewiß nicht einerley. (20. §.) Aber die Lage AB ist mit der Lage DF einerley: (23. §.) also ist die Lage oder Richtung AL auch mit der Lage DF nicht einerley.

1. Zusatz.

Wenn AB, DF, sich von A und D aus nach einerley Richtung erstrecken, und alsdenn durch A und einen Punct G in DF die grade linie EN gezogen wird, so sind auch die Abweichungswinkel EAB, EGF, von der lage GE gleich groß. Denn widrigenfalls wäre die lage oder Richtung AB nicht mit der lage GF einerley, folglich auch nicht mit der lage DF (19. §.)

2. Zusatz.

Zwey von einander verschiedene grade linien erstrecken sich also von zweyen Puncten A und D aus in einerley Ebene nur alsdenn nach einerley Richtung, oder zwey grade linien laufen durch A und D nur alsdenn in einerley Lage, wenn sie von der lage AD um gleiche übereinstimmig liegende Winkel CAB, CDF abweichen.

3. Zusatz.

Wenn von den Puncten A und D aus zwo grade linien AL, DF sich nach verschiedenen Richtungen erstrecken, also beyde nicht einerley lage haben, so sind ihre Abweichungswinkel CAL, CDF, von der lage DA ungleich: denn widrigenfalls hätten AL, DF, einerley lage. (23. §.)

26. §.

Wenn beyde Schenkel eines gradlinichten Winkels MAN von einer graden Linie HF in D und G geschnitten werden, so ist die Differenz der übereinstimmig liegenden Abweichungswinkel FGA, FDA beyder Schenkel von der Lage HF dem Winkel MAN gleich.

Beweis. Der äussere Abweichungswinkel FGA ist grösser, als der innere FDA. Denn eine grade linie GK, die von G aus mit DA nach einerley Richtung läuft,

kann DA nicht schneiden (22. §. 2 Zus.), also kann GK nicht zwischen GA und GD fallen (17. §. n. 2.) sie muß vielmehr zwischen GF und GA ihre Stelle erhalten: alsdenn ist AGK = FGA — FGK. Ferner ist FGK = FDA, (25. §. 2 Zus.) also AGK = FGA — FDA. Ueberdem ist die Lage AC mit DC völlig einerley, (19. §.) also erstrecken sich auch GK und AC von G und A aus nach einerley Richtung; darum ist AGK = EAC, (25. §. 2. Zus.) also EAC oder MAN = FGA — FDA.

27. §.

13. Fig. Der äussere Winkel ACD, welchen die nach D verlängerte Seite BC eines gradlinichten Dreyeckes ABC mit der anliegenden Seite CA einschliesset, ist der Summe der beyden innern Winkel bey A und B gleich: alle innere Winkel im Dreyeck aber zusammen genommen sind der Summe zweyer rechten Winkel gleich.

Beweis. 1) Es ist BAC = ACD — ABC, (26. §.) also ACD = BAC + ABC. 2) Ferner ist ACD + ACB = 2 R, also auch BAC + ABC + ACB = 2 R.

Zusatz.

Wenn AC = BC, also das Dreyeck gleichschenklicht ist, und einer von den gleichen Schenkeln nach D verlängert wird; so ist der äussere Winkel an der Spitze C doppelt so groß, als jeder von den Winkeln an der Grundlinie bey A und B: oder jeder von diesen Winkeln an der Grundlinie ist halb so groß, als der äussere Winkel an der Spitze C.

1. Anmerkung.

Der Beweis dieses Lehrsatzes stehet mit dem bisherigest Vortrage, so weit derselbe die Lage und Richtung grader Linien in einer Ebene betrift, in der genauesten

Ver-

Verbindung. Es ist sonst dieser Beweis mit dem völlig einerley, welchen Euklides im 1 Buch 32 Satz vorträgt: nur ziehet er CE mit BA parallel, ich ziehe CE mit BA nach einerley Richtung oder in einerley Lage. Alles kommt darauf an, die Richtigkeit der Folge zu beweisen, wenn DCE = CBA gemacht wird, daß alsdenn zugleich ECA = CAB sey. Sonst fehlt allemahl eine Bestimmung, wenn man versuchen will, diese Folge unabhängig vom XI. Grundsatz Euklids zu beweisen: mein Verfahren leitet dagegen ganz ungemein leicht, und gleichsam von selbst auf diese Folge, und ist wie es mir scheint eine eigentliche Ergänzung des Euklideischen Systems. Soviel ich finden kann, leuchtet es aus dem ganzen Vortrage von 19. bis 25. §. genug hervor, daß der Begriff der graden Linie überall zum Grunde liege, und alles so bestimmt sey, wie es der graden Linie eigen ist. Der Sprachgebrauch läßt sich vielleicht nach und nach noch bestimmter festsetzen, wie ich im 20. §. schon zu erkennen gegeben habe, und das wird zugleich die Sache selbst immer mehr ins Licht setzen.

2. Anmerkung.

Wenn man in der 12 Fig. ADP = DAG = CAE macht, so ist für sich klar, daß FDP = FDA + DAG sey. Aber GE und AE, sind einerley grade Linie, AE und DP erstrecken sich von A und D aus nach einerley Richtung, also auch GE und DP von G und D aus, darum ist FGA = FDP, also auch FGA = FDA + DAG, oder FGA ist die Summe der entgegen gesetzten Abweichungswinkel ADG, CAE von der Lage MC. (Man vergleiche die zweyte Ausgabe meines Auszuges aus den Anfangsgr. u. d. Lehrb. der Math. Wiss. Geom. 53.54. §. 70. S. Wenn vielleicht der dortige Vortrag noch zu kurz und nicht einleuchtend genug scheinen möchte; so kann er leicht aus dem bisherigen Vortrage ergänzt werden.

3. An-

3. Anmerkung.

Wenn man OB durch A so ziehet, daß CAB = ADG wird, und die Theorie von den Parallellinien vorher noch nicht bewiesen ist; so fehlt der Beweis, daß EAO = AGD werde. Macht man CAB = ADG und EAO = AGD, so fehlt der Beweis, daß AB, AO, in grader Linie liegen, weil man letzteres sonst nur daraus schließt, wenn man aus andern Gründen weiß, daß BAC + CAE + EAO = 2R sey. Nun hat man noch ein eben so sicheres Kennzeichen davon, daß BAO eine grade Linie sey, wenn CAB = ADG, EAO = AGD ist. Denn AB und DF laufen aus A und D nach einerley Richtung, so wie AO und GD von A und G aus sich nach einerley Richtung erstrecken. Weil nun DG und GD einander in einerley Richtung entgegen gesetzt sind; so sind es auch AB und AO. Wenn also CAB = ADG und EAO = AGD gemacht ist, so liegt AO mit AB in grader Linie: also ist BAC + CAE + EAO = 2R, mithin auch ADG + DAG + AGD = 2R.

28. §.

14. Fig. Grade Linien, die in einerley Ebene einerley Lage haben, sind parallele Linien.

Beweis Wenn AB, CD einerley lage haben, so kann man G in AB, H in CD nehmen, und EF durch G und H ziehen, so erstrecken sich beyde von G und H aus nicht allein gegen B und D, sondern auch gegen A und C zu nach einerley Richtung: demnach können AB und CD einander nicht schneiden, oder AB und CD sind parallel. (22. §. 2. Zus.)

29. §.

14. Fig. Von den beyden übereinstimmig liegenden Winkeln EGB, EHD, unter welchen zwey grade Linien GB, HD, an einer Seite von der dritten GH abweichen, werde ich wie gewöhnlich den einen EGB den äussern, und den an-

dern

dern EHD den innern nennen: auch sollen EHD und AGF die Wechselswinkel heissen. Die Winkel EHD und BGF können alle beyde innere heissen: zu BGF gehört alsdenn der äussere Winkel DHF.

1. Zusatz.

Wenn man von den dreyen Voraussetzungen,

1. daß der äussere Winkel EGB dem innern EHD gleich sey,
2. daß ein Wechselswinkel EHD dem andern AGF gleich sey,
3. daß beyde innere Winkel EHD und BGF zusammen zwey rechte Winkel ausmachen.

eine als wahr annimmt, so folgen daraus von selbst die übrigen beyden. Auch ist es gleichgültig, ob man bey der dritten Voraussetzung beyde innere Winkel an der einen oder der andern Seite von EF versteht. Wenn beyder Summe an der einen Seite zwey rechte Winkel ausmacht, so ist die Summe der beyden innern Winkel an der andern Seite eben so groß. Die Beweise hievon sind leicht und bekannt.

2. Zusatz.

Wenn demnach zwo grade Linien AB, CD, in einerley Ebene einerley Lage haben, und mit einer dritten EF in G und H geschnitten werden; so ist nicht allein jeder äussere dem zugehörigen innern Winkel gleich (25. §. 2. Zus.), sondern auch beyde Wechselswinkel sind gleich groß, und die Summe der beyden innern Winkel an jeder Seite von EF ist zweenen rechten Winkeln gleich. (1. Zus.)

30. §.

Werden dagegen zwo gerade Linien KL und CD, die in einerley Ebene nicht einerley Lage haben, mit einer drit- 14. Fig.

dritten EF in G und H geschnitten; so ist auf der einen Seite der äussere Winkel grösser, auf der andern Seite kleiner, als der gegenüberstehende innere: auch ist auf der Seite, wo der äussere Winkel den innern übertrift, die Summe der beyden innern Winkel kleiner, an der andern Seite aber größer, als zwey rechte Winkel.

Beweis. Der äussere Winkel EGL ist nun dem gegenüberstehenden innern EHD ungleich (25. §. 3. Zus.) Ferner ist allemahl $EGL + EGK = EHD + EHC = 2R$: wenn also $EGL > EHD$ ist, so ist dagegen $EGK < EHC$, und umgekehrt. Es sey also $EGL > EHD$, so ist $EHD + LGF < EGL + LGF$, folglich $EHD + LGF < 2R$. Ueberdem ist alsdenn $EGK < EHC$, also $EHC + KGF > EGK + KGF$, oder $EHC + KGF > 2R$.

31. §.

14. Fig. Wenn eine Seitenlinie GH und ein anliegender Winkel GHD gegeben sind; so kann man aus beyden ein solches Dreyeck verzeichnen, worinn der Winkel, welcher der gegebenen Seite GH gegenüber steht, kleiner ist, als jeder gegebene Winkel.

Beweis. In demjenigen Schenkel HD des gegebenen Winkels, dessen Länge nicht bestimmt ist, nehme man einen Punct M wo man will an, und ziehe GM; man nehme hiernächst $MN = MG$ und ziehe GN, so ist $GNH = \frac{1}{2}GMH$ (27. §. Zus.) Man nehme aufs neue $NO = NG$, und ziehe GO, so ist $GON = \frac{1}{2}GNH$, also $GON = \frac{1}{2^2}GMH$. Weiter nehme man $OP = OG$, und ziehe GP, so ist $GPH = \frac{1}{2}GOH$, also $GPH = \frac{1}{2^3}GMH$. Fährt man so fort, so wird jedesmal der Winkel an der Spitze im folgenden Dreyeck halb so groß, als er im vorigen war, mithin wird er nach nmaliger Wie-

Wiederholung desselben Verfahrens $= \frac{1}{2^n}$ GMH: die Zahl 2^n aber kann so groß werden, daß $\frac{1}{2^n}$ GMH kleiner wird, als jeder Winkel, der sich angeben läßt, er sey so klein als er wolle. (Euklids X. Buch 1. Satz.)

Anmerkung.

Daß der Satz, worauf dieser Beweis beruhet, beym Euklides allererst im X. Buch vorkommt, wird hoffentlich keinen Anstoß verursachen: denn der Satz hätte eben so gut im I. Buch unter den Grundsätzen stehen können. Wenn $A > B$ ist, so kann man B sovielmahl zu sich selbst addiren, oder welches einerley ist, man kann B mit einer so grossen ganzen Zahl n multipliciren, daß $n B > A$ wird: alsdenn ist umgekehrt $\frac{1}{n} A < B$. Wer einwenden wollte, daß der Satz nicht geometrisch sondern arithmetisch sey, weil die Begriffe vom Addiren oder Multipliciren dabey zum Grunde liegen, der würde wegen eben der Ursache auch Euklids 2. 3. 4. 5. 6. 7. Grundsätze im I. Buch nicht in der Geometrie anwenden müssen.

32. §.

Zwo grade Linien CD, KL, die in einerley Ebene nicht einerley Lage haben, also von einer dritten EF, welche beyde schneidet, unter ungleichen Winkeln abweichen, schneiden einander selbst, wenn man sie nach der Seite hin verlängert, wo die Summe der innern Winkel, $EHD + LGF$ weniger als zwey rechte Winkel ausmacht.

Beweis. Die innern Winkel, deren Summe $< 2R$ ist, liegen an der Seite, wo der äussere Winkel EGL

EGL grösser ist, als der innere gegenüber stehende EHD (30. §.) Es sey also EGL > EHD, und man mache EGB = EHD, so haben AB und CD einerley Lage (24. §), und es ist EHD + BGF = 2R (29. §. 2. Zus.) Weil nun EHD + LGF < 2R ist, so ist EHD + LGF < EHD + BGF, und LGF < BGF: mithin liegt GL zwischen den Schenkeln des Winkels BGF, und BGL = BGF — LGF ist ein gegebener Winkel. Man nehme GH und den anliegenden Winkel GHD als gegebene Stücke an, und zeichne über GH ein Dreyeck, worin der Winkel GPH der Seite GH gegenüber kleiner als BGL ist (31. §.), so ist überdem GPH = BGP (29. §. 2. Zus.), also BGP < BGL. Es ist aber HGP + BGP = LGF + BGL, also nun HGP > LGF: mithin liegt GL zwischen den Schenkeln des Winkels HGP in der Fläche des Dreyecks GHP, und GL verlängert schneidet HD. (17. §. n. 2.)

1. Zusatz.

Parallele Linien haben in einerley Ebene einerley Lage. Denn parallele Linien liegen in einerley Ebene so, daß sie nicht zusammen laufen und einander schneiden können; hätten sie aber nicht einerley Lage, so würden sie verlängert einander schneiden, welches jenem widerspricht.

2. Zusatz.

Wenn demnach zwo parallele Linien von einer dritten durchschnitten werden; so sind nicht allein der äussere und innere Winkel gleich groß, sondern auch beyde Wechselswinkel, und die Summe der beyden innern Winkel an jeder Seite der schneidenden Linie ist zweenen rechten Winkeln gleich. (29. §. 2. Zus.)

Anmerkung.

Wenn irgend eine andre mir bekannt gewordene Art, das zu ergänzen, was der Theorie von den Parallellinien

beym Euklides fehlt, mich besser befriedigte, als mein Versuch, besonders wie ich ihn hier vorgetragen habe, so würde ich die zur Entwerfung dieses Aufsatzes nöthig gewesene Zeit weit lieber auf andre Untersuchungen verwandt haben. Ich würde sehr gern dem, was mir mehr einleuchtend schiene, meinen Beyfall öffentlich geben, und alle anderweitige Bemühungen widerrathen. Ich bin sehr davon überzeugt, daß einer Wissenschaft schlecht damit gedient sey, wenn man unaufhörlich dem, was andre geleistet haben, nur Zweifel und Einwendungen entgegen setzet: mir macht es eben so viel Vergnügen, wenn ich darauf weiter fortbauen, das vielleicht noch fehlende ergänzen, oder das Ganze in einem noch bessern Lichte darstellen kann.

Andre neuere Bemühungen, die Theorie von den Parallellinien zu ergänzen.

33. §.

Unter den zur Lehre von den Parallellinien gehörigen Sätzen giebt es mehrere die sich als sehr leichte Folgen hervorgeben, wenn Euklids XI. Grundsatz entweder als erwiesen oder als für sich evident angenommen wird: zum Theil sind diese Sätze dem Verstande auch ohne Beweis wenigstens eben so leicht faßlich, als jener XI. Grundsatz beym Euklides. Zwey grade linien, die mit einer dritten parallel laufen, sind unter einander selbst parallel. Durch einen und eben denselben Punct kann man nicht zwey verschiedene grade linien mit einer und eben derselben dritten parallel ziehen. Diese und dergleichen Sätze mehr, die beym gewöhnlichen Vortrage als Schlußfolgen erscheinen, könnte man wenigstens mit eben dem Rechte als Euklids Grundsatz ohne Beweis annehmen, und das übrige in umgekehrter oder wenigstens etwas veränderter Ordnung daraus herleiten. Bey meinen ehemaligen Bemü-

mühungen, das was man hier wünschet, zu leisten, habe ich schon vor zwanzig und mehr Jahren allerley solche Einleitungen versucht, die nach der Zeit zum Theil als neue Beweisarten sind angekündiget worden. Eine Bemerkung, worauf man bey dieser Untersuchung leicht verfällt, ist diese, daß der Satz:

> Grade Linien, die (in einerley Ebene wie sich immer von selbst verstehet) mit einer dritten parallel laufen, sind mit einander selbst parallel,

in dem einen Falle evident sey, wenn die dritte Vergleichungsparallele, wie sie kurz heissen kann, zwischen den beyden andern liegt: das verleitet natürlich zu dem Versuch, auch für den andern Fall einen Beweis zu finden, wenn die Vergleichungsparallele nicht zwischen den beyden andern liegt. Ich habe mehr Zeit damit hingebracht, als mir lieb ist, um auf einen solchen Beweis zu kommen; ich hatte aber die Sache längst aufgegeben, als ich im Leipziger Magazin zur Naturkunde, Mathematik und Oeconomie von 1781 im 2ten Stück, 165. S. diesen Satz als Lehrsatz und mit einem solchen Beweise versehen antraf, den Herr Professor Hindenburg unabhängig von Euklids XI. Grundsatze geführt zu haben glaubte. Beyde schon oben angezeigte Fälle sind richtig unterschieden, und mit dem ersten Falle hat es seine ungezweifelte Richtigkeit: über den Beweis für den zweyten Fall werden mir um deßwillen ein paar Bemerkungen erlaubt seyn, damit ich zeige, daß mein eigener Versuch dadurch nicht überflüssig gemacht sey, den ich sonst gern aufgegeben hätte, wenn mich der Hindenburgische Beweis befriedigte. Ich muß aber den Beweis ganz hersetzen, damit nicht der Verdacht entstehen könne, als wenn ich etwas wesentliches von dem möchte weggelassen haben, was zur Vollständigkeit des Beweises gehöre.

34. §.

„Gesetzt zwo grade Linien AB, CD, wären auf den 15. Fig.
Fall, daß ihre Vergleichsparallele EF nicht zwischen sondern ausser ihnen läge, nicht parallel; so ziehe man durch einen willkührlichen Punct I in AB eine Parallele GH mit CD, die folglich von AB verschieden seyn wird.

Weil also GH parallel mit CD (constr.) und EF parallel mit CD (hyp.) so ist auch GH parallel mit EF (nach dem 1. Falle, weil CD zwischen GH und EF liegt).

Aber CD ist parallel mit EF (hyp.) also wäre GH nicht parallel mit CD, (nach der Annahme im zweyten Falle im Anfange des Beweises, weil EF nicht zwischen sondern ausserhalb GH und CD liegt.) Aber diese letzte Folge GH nicht parallel mit CD widerspricht der Voraussetzung GH parallel mit CD: es giebt also keine GH die durch einen Punct in AB gezogen von AB verschieden wäre; also ist AB selbst parallel mit CD.„

Die Annahme im Anfange des Beweises kann niemand, der sonst weiß, was ein indirecter oder apogogischer Beweis ist, anders als so verstehen:

Gesetzt einige Paare mit einer dritten, ausserhalb des von ihnen begränzten Raums liegenden, graden Linie EF parallele Linien AB, CD, wären nicht parallel.

Zu diesem Obersatze gehört nun im letzten Schlusse der Untersatz:

Aber CD und GH sind ein solches Paar mit der dritten ausserhalb des von ihnen begränzten Raums liegenden EF parallele Linien.

Weil aber der Obersatz kein allgemeiner Satz ist, so folgt daraus der Schlußsatz nicht:

Also sind GH und CD nicht parallel.

35. §.

Soll der Obersatz als ein allgemeiner Satz gelten, so hat es zwar mit dem letzten Schlusse seine gute Rich-

tigkeit und die Annahme im Anfange des Beweises ist nun der nachstehende allgemein verneinende Satz:

(B) Kein einziges Paar mit einer dritten ausserhalb des von ihnen begränzten Raums liegenden graden Linie EF paralleler Linien AB, CD, ist selbst parallel.

Die Falschheit dieses ganz allgemein ausgedrückten Satzes erhellet freylich ohne Umstände gleich daraus, weil nicht allein vermöge des ersten Falles, wenn die Vergleichs-parallele zwischen den beyden andern liegt, sondern auch nach Euklids 31 Satze drey grade Linien einander parallel seyn können: aber daraus folgt, wie es sehr bekannt ist, keinesweges die Wahrheit des allgemeinen dem vorigen sonst entgegen gesetzten Satzes:

(A) Ein jedes Paar mit einer dritten ausserhalb des von ihnen begränzten Raums liegenden graden Linie EF paralleler Linien AB, CD, ist selbst parallel.

Der Satz ist falsch:

Kein einziges Dreyeck ist gleichschenklicht:

aber folgt daraus die Wahrheit des nachstehenden Satzes

Ein jedes Dreyeck ist gleichschenklicht?

Wenn man die Falschheit eines Satzes bewiesen hat, und man will daraus auf die nothwendige Wahrheit des entgegen gesetzten Satzes schliessen, so muß dieser ein besondrer Satz seyn, wenn jener ein allgemeiner Satz war, und umgekehrt; beyde Sätze müssen contradictorie entgegen gesetzt seyn. Zwey allgemeine einander sonst entgegen gesetzte Sätze, (propositiones contrarie oppositae) können alle beyde falsch seyn. Das stehet in allen Lehrbüchern der Vernunftlehre.

36. §.

Ich habe diese Gründe, weßwegen der Beweis mich nicht befriediget, dem Herrn Professor Hindenburg gleich schriftlich mitgetheilt, nachdem das zweyte Stück des Leipziger Magazins im Druck erschienen war: dadurch ist der

zwey=

Schriftsteller mit aufgeführt. Daß ein besonderer Satz, der aus einem allgemein bejahenden Satze nach der Conversionsregel per accidens ist gefolgert worden, oft allgemein wahr seyn könne, weiß jedermann. Wenn es aber erlaubt seyn soll, beym wissenschaftlichen Vortrage davon als von einem allgemeinen Satze Gebrauch zu machen; so muß der Satz, von dessen allgemeinen Richtigkeit man durch die Umkehrung allein nicht versichert ist, mit einem eigenen Beweise versehen werden, und dazu hat man ausser der vorigen wenigstens noch eine andre Prämisse nöthig.

Ich behalte das Beyspiel, was auf der 356 Seite angeführt wird, es sey nicht allein der Satz wahr,

„alle einander deckende grade linien sind gleich groß,„

sondern auch der umgekehrte,

„alle gleich grosse grade linien decken einander.„

Auf die Frage: warum ich von der Wahrheit des zweyten Satzes eben so gut als von der Wahrheit des ersten überzeugt sey? antworte ich nach meiner Logik:

meine Ueberzeugung gründe sich nicht darauf, weil der zweyte Satz durch eine Umkehrung aus dem ersten folge, sondern darauf, weil ich aus andern Gründen wisse, es sey auch überdem noch der Satz wahr:

alle einander nicht dekende grade linien sind ungleich groß.

Auf diesen letzten Satz kann ich ferner die Conversionsregel per contrapositionem, (M. s. oben den 5. §.) anwenden, so leitet diese auf die neue Schlußfolge:

alle gleich grosse grade linien decken einander.

Auf eben die Schlußfolge leitet auch die Regel von der Opposition.

Mit dem Obersatze:

Alle einander nicht deckende grade linien sind ungleich groß,

verbindet man den Untersatz

Einige gleich grosse grade Linien decken einander nicht;
so folgt daraus der Schlußsatz
Einige gleich grosse grade Linien sind ungleich groß,
welcher mit sich selbst streitet. Weil nun die Form des Schlusses richtig ist, so muß eine Prämisse falsch seyn. Von der Wahrheit des Obersatzes ist man aus andern Gründen versichert, also muß der Untersatz falsch mithin der contradictorie entgegen gesetzte wahr seyn:
alle gleich grosse grade Linien decken einander.
Um also auf diesen Schlußsatz zu kommen, habe ich eine andre Prämisse nöthig, die mit dem Satze:
Alle einander deckende grade Linien sind gleich groß,
keinesweges einerley ist. Es ist ja auch der Satz wahr
Alle einander deckende Triangel sind gleich groß
Weil mir aber nicht eben so einleuchtet, daß auch der folgende Satz wahr sey:
Alle einander nicht deckende Triangel sind ungleich groß,
so komme ich auch nicht auf die Schlußfolge:
Alle gleich grosse Triangel decken einander.

38. §.

Mit den Schlüssen aus der Opposition der Sätze hat es eine ähnliche Bewandniß. Zugegeben, daß man in besondern Fällen überzeugt seyn könne, von zweyen contrarie opponirten Sätzen
Alles A ist B,
Kein A ist B,
müsse der eine nothwendig wahr der andre falsch seyn; so ist man doch nie aus dem Grunde davon überzeugt, weil ein Satz dem andern entgegen gesetzt ist; es müssen andre Gründe diese Ueberzeugung bewirken, solche die nach der eigenen richtigen Bemerkung des Herrn Prof. Hindenburgs aus näherer Untersuchung der Eigenschaften des

Subjects und Prädicats erhellen. (Auf der 360 Seite Litt e. heißt es: wenn es entweder offenbar ist, oder sonst dargethan werden kann, daß u. s. w.) Ist die Falschheit des Satzes bewiesen

Kein A ist B,

so bin ich überzeugt der Satz

Einiges A ist B

sey wahr, weil er jenem contradictorie entgegen stehet. Wegen andrer Gründe kann ich freylich auch auf die Schlußfolge kommen

Alles A sey B,

allein alsdenn bleibt es keine unmittelbare Folge mehr, die aus der Opposition einleuchtet. Wenn ich vielleicht aus andern Gründen überzeugt bin, der Satz sey ebenfalls wahr

Alles was nicht B ist, das ist nicht A, so kann ich damit die Conversionsregel per contrapositionem verbinden, und dadurch auf den Satz kommen

Alles A ist B.

Nun gründet sich meine Ueberzeugung von der Wahrheit des letzten Satzes nicht darauf, weil er dem erweißlich falschen Satz: Kein A ist B, contrarie entgegen gesetzt ist, sondern darauf, weil ich eine andre Prämisse habe:

Alles, was nicht B ist, das ist auch nicht A, woraus er durch die Umkehrung per contrapositionem folgt.

Mit der eben angeführten Prämisse als Obersatz kann man auch den Satz

Einiges A ist nicht B

als Untersatz verbinden, so giebt das den sich selbst widersprechenden Schlußsatz

Einiges A ist nicht A;

folglich ist der contradictorie entgegengesetzte Satz wahr:

Alles A ist B.

39. §.

Das Eigene und Besondre der vom H. Prof. Hindenburg gebrauchten Beweisform soll nach seiner Aeusserung (a. a. O. 361. S) darin bestehen, daß man den bedingungsweise für wahr angenommenen allgemeinen Satz weiter auf sich selbst anwendet, gleichsam durch sich selbst auf die Probe setzet, und so den Satz als falsch umstößt, sobald Folgen oder Schlüsse aus ihm mit andern bekannten Wahrheiten, oder wider einander selbst streiten. Ich für mein Theil finde hierin nichts Eigenes oder Besonders: die Falschheit des allgemein verneinenden Satzes (B) oben im 35. §. ist völlig richtig auf eine sonst sehr gewöhnliche Art bewiesen, und es wird schwerlich jemand etwas dagegen einzuwenden haben. Soviel ich habe finden können, bestehet das Eigene und Besondre der Beweisform darin, daß

aus der bewiesenen Falschheit des Satzes (B) die Wahrheit des contrarie entgegen gesetzten Satzes (A) oben im 35. §. erhellen soll.

Diese Schlußfolge soll nach S. 360. litt. e richtig seyn, wenn es entweder offenbar ist, oder sonst dargethan werden kann, daß (mit Ausschliessung jedes dritten Satzes) einer von beyden nothwendig wahr, der andre falsch seyn müsse. Demnach kommt alles auf die Frage an: ob es entweder für sich offenbar, oder sonst vom H. Prof. Hindenburg dargethan sey, daß von den Sätzen (A) und (B) oben im 35. §. einer nothwendig wahr der andre falsch seyn müsse.

40. §.

Zur Beantwortung dieser Frage dient die nachstehende Stelle a. a. O. 349. 350. S.

„1.) Es ist offenbar, daß von den beyden Sätzen (A) und (B) wie oben im 35. §. einer nothwendig wahr,

der

der andre falsch seyn müsse. Ein Drittes giebts hier nicht.

II.) Ein solches Dritte würde seyn, wenn man annehmen wollte, die so bestimmten graden Linien könnten in einigen Fällen einander parallel, in andern nicht parallel seyn. Daß das nicht seyn könne, erhellet daraus, weil beyde entgegen gesetzte Aussagen in der Bestimmung des Subjects gegründet seyn müsten, die aber hier ganz einfach ist, — — — — so daß besondre Fälle oder Modificationen (wovon das Zusammenlaufen oder Nichtzusammenlaufen der Linien abhängen könnte) gar nicht statt finden, oder sich gedenken lassen.„ Was in der Parenthese stehet, das ist vermuthlich dem Sinne des H. Hindenburgs gemäß so zu verstehen:

wovon das Zusammenlaufen der Linien in einigen und ihr Nichtzusammenlaufen in andern Fällen abhangen könnte.

Das alles soll also offenbar seyn, sonst ist auch nichts weiter beygebracht, wodurch es dargethan wäre. Ich habe doch sonst dem Vortrage vieler andrer Schriftsteller bey weit mehr verwickelten Schlüssen folgen können; an Mühe, Zeit und Aufmerksamkeit habe ich es gewiß nicht fehlen lassen, um aus dem Vortrage des H. Prof. Hindenburgs das aufzufinden, worauf das Bindende in seinem Beweise eigentlich ankommen soll: ich wage es also, das in seinem Beweise (a. a. O. 166. S.) zu ergänzen, was den hier angeführten Stellen gemäß ergänzt werden muß. Man vergleiche auch a. a. O. 368. 369. S.

41. §.

Den Anfang des Beweises schreibe ich ab; so wie er a. a. O. 166. S. gedruckt stehet, und schliesse das, was nach der eigenen umständlichen Erläuterung des Herrn Hin-

Hindenburgs hinzugesetzt werden muß, in eine Parenthese ein.

Beweis. Gesetzt (nur einige Paar solcher) graden Linien, wie hier AB, CD, wären auf den Fall, daß ihre Vergleichsparallele, wie hier FF, nicht zwischen sondern ausser ihnen läge, nicht parallel; (so folgt offenbar, daß alle Paare so bestimmter grader Linien nicht parallel seyn müsten: denn besondre Fälle, oder Modificationen, wovon das Zusammenlaufen in einigen, und das Nichtzusammenlaufen in andern Fällen abhängen könnte, finden gar nicht statt, oder lassen sich nicht gedenken. Der Erfolg aus der angenommenen Bestimmung des Subjects muß bey allen Paaren so bestimmter Linien einerley seyn. In der Sprache der Logik: die Bejahung oder Verneinung des Prädicats hat ihren zureichenden Grund im Subjecte und dessen Bestimmung; also können einerley Subjecte, auf einerley Art determinirt, nicht entgegen gesetzte Prädicate haben a. a. O. 368. S. und unten die Anmerkung. Es ist aber falsch, daß alle Paare, mit einer dritten ausserhalb des zwischen ihnen befindlichen Raums befindlichen graden Linie parallel laufende grade Linien nicht parallel sind: denn) man ziehe durch einen willkührlichen Punct, u. s. w. Das folgende, wie es oben schon im 34. §. aus dem Magazin abgeschrieben ist, bleibt alles bis auf die Worte: also wäre GH nicht parallel mit CD. Was aber in der Parenthese dabey stehet, nach der Annahme im 2ten Falle — — muß nun so heissen (vermöge des geführten Beweises, daß das, was vermöge der Annahme nur von einigen Paaren gelten sollte, von allen gelten müste.) Aber GH nicht parallel CD widerspricht dem GH parallel CD grade zu — — — Es giebt also keine GH — — — Gegen diese letztern Schlußfolgen ist zwar nichts wesentliches zu erinnern: das mit aber die eigentliche Form des Beweises sich in ihrem ganzen licht zeige, würde man anstatt der letzten Periode,

die

die so anfängt; Es giebt also keine GH..... die nachstehende setzen können.

Die Annahme:

Gesetzt nur einige Paar auf die schon bekannte Art bestimmter grader Linien wären nicht parallel, leitet also auf eine sich selbst widersprechende Folge; demnach ist diese Annahme falsch und der ihr contradictorie entgegen stehende Satz wahr:

Alle so bestimmte Paare grader Linien sind parallel.

42. §.

Das Bindende in dem Beweise des Herrn Professor Hindenburg kommt also ganz eigentlich darauf an. Wenn man annehmen wollte,

nur einige Paare mit einer dritten ausserhalb des zwischen ihnen befindlichen Raums liegenden graden Linie parallele Linien wären mit einander selbst nicht parallel;

ob daraus entweder für sich schon offenbar, oder nach dem Satze des zureichenden Grundes folge, daß alle solche Paare nicht parallel seyn müsten?

Ich gestehe gern, daß diese Folge mir nicht offenbar einleuchtend scheine: allein man muß nie über die Frage disputiren, ob etwas offenbar, oder nicht offenbar einleuchte, (7. u f. §§.) also habe ich gar nichts weiter einzuwenden, wenn Herr Professor Hindenburg versichert, daß ihm diese Folge offenbar einleuchte. Wofern man aber, um diese Folge einleuchtend zu machen, den Satz des zureichenden Grundes zu Hülfe nehmen muß; so habe ich die wichtige Einwendung, daß H. Prof. Hindenburg sonst diesen Satz wohl schwerlich als einen geometrischen Grundsatz gelten lassen würde. Wofern übrigens die Behauptung, daß von den Sätzen (A) und (B) (35. §.) nothwendig einer wahr, der andre falsch seyn müsse, im 2 Falle des Beweises a. a. O. 166 S. für sich offenbar ist, so ist sie es aus eben den Gründen, die

a. a. O.

a. a. O. 368 S. angeführt sind, auch für den 1 Fall: also braucht man keinen besondern Beweis für den ersten Fall. Weil nun nach Euklids 31 Satze es auch mit dem nachstehenden seine ungezweifelte Richtigkeit hat:

Einige Paare mit einer dritten parallele Linien sind unter sich parallel, die Vergleichungsparallele mag dazwischen liegen oder nicht;

so weiß man auch gewiß, daß (B) falsch, also vermöge der zum voraus als für sich offenbar festgesetzten Behauptung der Satz (A) der nothwendig wahre sey.

Ich denke, daß heißt kurz und gut soviel. Der Satz:

Alle grade mit einer dritten parallele Linien sind unter einander selbst parallel,

ist für sich offenbar genug, daß er als Grundsatz gelten kann.

43. §.

Was ferner die vermeinte neue Beweisart (a. a. O. 360 S. litt. e.) betrift, so kann ich sie vermöge dieser richtigen Darstellung der Art und Weise, wie der nach derselben geführte Beweis eigentlich binden würde, für keine andre als die längst bekannt gewesene vom H. Prof. Hindenburg a. a O. 357 S. litt. e. aufgeführte Beweisform halten: das läßt sich kurz so übersehen. Man kommt auf den Satz

Einiges A ist B,

und will prüfen, ob der Satz nicht vielleicht allgemein wahr sey,

Alles A ist B.

Demnach nimmt man wie gewöhnlich den contradictorie entgegen gesetzten Satz

1.) Einiges A ist nicht B

als wahr an, um zu versuchen, was für Folgerungen sich daraus herleiten lassen. Man findet, es lasse sich darthun, oder es leuchte wohl gar offenbar ein,

wenn

wenn auch nur einiges A nicht B wäre, so müsse eben darum auch allgemein wahr seyn.

2.) Kein einziges A ist B.

Aber vorher wuste man schon,

wenigstens einiges A ist B,

damit streitet der Satz

2.) Kein einziges A ist B,

als die contradictorie opposita, mithin ist der Satz n. 2. falsch. Demnach muß auch der Satz

1.) Einiges A ist nicht B

falsch seyn, weil der falsche Satz n. 2. richtig daraus folgt: also ist der Satz wahr, welcher dem Satz n. 1. contradictorie entgegen stehet,

Alles A ist B.

Unter der Bedingung, daß der Satz n. 2. aus n. 1. richtig folgt, kann man an der ganzen Form des Beweises nichts aussetzen.

Ich habe es bey dieser Untersuchung so gemacht, wie ich es in andern Fällen zu machen pflege, wenn ich einen philosophischen Schriftsteller lese, und hie oder da auf einen mir nicht gleich einleuchtenden Beweis stosse. Die Weitläuftigkeit der Worte ist oft der Deutlichkeit hinderlich, ich zeichne mir also den Beweis. Wenn ich A, B, X, Y, statt der Begriffe setze, die in den mit einander verbundenen Sätzen Subject und Prädicat seyn sollen; so habe ich den Beweis in seiner rechten durch keine äusserliche Einkleidung verstellten Gestalt vor mir. Nun ist die Prüfung sehr leicht, ob die Form des Beweises richtig sey? und hiernächst trift die Reihe die Sätze selbst, oder das Materiale des Beweises. Es ist manches von einer allgemeinen zum Erfinden geschickten Bezeichnungskunst, vom logischen Calcul, und dergleichen mehr geschrieben worden: ich dächte, wir hätten das alles, wenn wir nur nicht darüber des rechten Gebrauchs verfehlten, weil wir vom Calcul mehr verlangen, als er seiner Natur

nach

nach leisten kann. Der logische Calcul setzt voraus, daß man zuerst die philosophische Analysin anstelle, bevor man die Bezeichnungskunst anwenden, und das übrige durch Zeichen finden kann. Wer eine mathematische Untersuchung algebraisch anstellen will, muß ebenfalls die Analysin der Rechnung vorangehen lassen.

44. §.

Das Resultat von der bisherigen ganzen Untersuchung darüber, was H. Prof. Hindenburg eigentlich geleistet habe, dürfte also wohl kein andres als das nachfolgende seyn. Der Satz:

Alle grade mit einer dritten parallelle linien sind mit einander selbst parallel;

ist an sich selbst mehr einleuchtend als Euklidens XI. Grundsatz, obgleich Euklides jenen Satz als lehrsatz aus diesem herleitet. Man kehre also die Ordnung um, man nehme den erwehnten Satz, (wovon die contradictorie oppositа falsch ist, weil widrigenfalls die gewiß falsche contrarie oppositа wahr seyn müste,) als Grundsatz an; so läßt sich Euklidens XIter Grundsatz als Schlußsatz daraus herleiten. Das ist auch den eigenen Aeusserungen des H. Hindenburgs a. a. O. 348. und 162. S. ganz gemäß, und dagegen kann niemand etwas einzuwenden haben. Ich für mein Theil habe so wenig dagegen, daß ich vielmehr selbst sehr geneigt gewesen bin, auf den erwehnten Satz als Grundsatz den übrigen Vortrag zu gründen: nur hat mich bisher die Betrachtung davon zurück gehalten, daß dieses Verfahren doch das noch nicht sey, was man wünscht, eine Ergänzung dessen, was dem System zu fehlen scheinet. Mir blieb immer einige Hofnung übrig, daß es doch wohl möglich seyn möchte, auf eine solche Ergänzung des Systems zu kommen, wobey alle Sätze, die Euklides als lehrsätze beweiset, lehrsätze bleiben könnten, ohne einen davon auszuheben, um ihn als Grundsatz mit dem XIten Euklideischen zu vertauschen.

Läßt man das Wort parallel, und mit demselben die verwirrte Idee des Schneidens oder Nichtschneidens weg; so erscheint der eben erwehnte Satz in einem weit mehr sinnlich klaren Lichte so ausgedrückt:

Grade Linien die von zweyen verschiedenen Puncten aus mit einer dritten nach einerley Richtung laufen, erstrecken sich selbst nach einerley Richtung.

Noch specieller ausgedrückt:

Grade Linien, die durch einerley Punct mit einer dritten nach einerley Richtung laufen, fallen in einerley graden Linie zusammen,

schien mir der Satz beynahe völlig das einleuchtende zu haben, was man von einem Grundsatze verlangt, weil eben das eigenthümliche der graden Linie, daß jeder Theil von ihr mit der ganzen sich nach einerley Richtung erstreckt, darin ausgedrückt ist.

Eben durch diese und ähnliche Betrachtungen ward mein erster Versuch veranlasset.

Uebrigens schien es mir, wenn von zweyen verschiedenen graden Linien die Rede seyn sollte, daß der Ausdruck: einerley Lage haben, beym Vortrage in der höhern Geometrie und andrer Theile der Mathematik mehr gewöhnlich sey, als der Ausdruck: sich nach einerley Richtung erstrecken; daher kam es, daß ich bey meinem ersten Versuche, jenen Ausdruck wählte.

45. §.

Wer sich ein Bedenken daraus macht, aus den Begriffen von Identität und Verschiedenheit der Richtung oder Lage hier etwas herzuleiten, weil Euklides sie nicht hat, der wird schwerlich auf einem andern Wege fertig werden: er wird entweder Euklids XI. Grundsatz schlechthin gelten lassen, oder anstatt desselben einen von den nachstehenden gleichgültigen wählen müssen.

1) Gra=

nien zu Werke gehe. Nach einer kurzen Anführung der hieher gehörigen Stellen folgt die Beurtheilung, welche so merkwürdig ist, daß ich sie hier ganz abschreiben muß.

„Den Beweis des Euklideischen Grundsatzes anlangend, so beruhet derselbe bey dem H. Verf. auf dem von ihm als Grundsatz angenommenen Satze:

daß jede grade Linie, welche durch einen innerhalb der Oefnung des Winkels befindlichen Punct gehet, genugsam verlängert wenigstens einen seiner Schenkel schneidet.

Da es aber demselben eben so sehr, als dem Euklideischen an derjenigen eigenthümlichen Evidenz mangelt, die uns berechtiget, einen Satz als Axiom anzunehmen, so ist dadurch der bekannten Schwierigkeit in der Lehre von den Parallellinien nicht abgeholfen.„

Bis dahin ist nichts zu erinnern: denn es war eben nicht nöthig, daß der Herr Recensent hinzu setzte, andre Schriftsteller hätten den Grundsatz auch schon gebraucht. Nun aber folgt eine Stelle, welche in einer Parenthese eingeschlossen, und so gefaßt ist, daß es nothwendig die Vermuthung erregen muß, sie rühre von einem ganz andern Verfasser her: auch diese Stelle muß ich noch hersetzen, weil nicht zu vermuthen ist, daß jeder Leser das Zeitungsbladt gleich zur Hand haben könne.

(welches aber auf dem eingeschlagenen Wege unsers Bedünkens leicht hätte geschehen können, wenn Herr Lorenz auf einen Erweis seines zu Hülfe genommenen Grundsatzes bedacht gewesen wäre, der sich in der That davon geben lässet: denn man setze, daß eine innerhalb der Oefnung eines Winkels liegende grade Linie keinen ihrer Schenkel schneide, und folglich mit beyden gleichlaufend sey, so würde (nach der Art wie Leipziger Magazin zur Naturk. M. u. De. 2 St. 1781. S. 165, 1 Fall) folgen, daß die Schenkel dieses Winkels selbst mit einander gleichlaufend wären; da nun dieses absurd

ist, so rc. Die Ordnung der Sätze im Buche würde also nun folgende seyn: — — — und alsdenn der Zusatz des 4. §. als ein Lehrsatz erwiesen werden müssen, woraus nunmehro der Euklideische Grundsatz ohne Schwierigkeit gerechtfertiget werden könnte. Und so gebührte denn, nach so vielen vergeblichen Bemühungen der grösten Mathematiker Herrn Lorenz die Ehre der Erfindung einer vollständig berichtigten Theorie der Parallelen.)

48. §.

Zuerst ein Paar Worte, das schließliche Compliment für H. Lorenz betreffend. Dasselbe gründet sich, wie ich nicht anders finden kann, auf den nachstehenden Schluß.

Herr Lorenz nimmt in der Lehre von den Parallellinien einen Grundsatz an, den er selbst nicht beweiset, der aber aus dem Hindenburgischen System der Parallellinien bewiesen werden kann, darum gebühret dem Herrn Lorenz die Ehre der Erfindung einer vollständig berichtigten Theorie von den Parallellinien.

Ich denke aber, daß Herr Lorenz diese Ehre gern dem Euklides selbst abtreten werde: denn die Demonstration, daß dem Euklides diese Ehre gebühre, bleibt eben so bündig, wenn man in dem voranstehenden Schlusse den Nahmen Euklides anstatt des Nahmens Lorenz setzet. (Leipz. Mag. a. a. O. 167. S. VI. Lehrsatz.)

Wenn aber auch Euklides diese Ehre mit einem neuern Schriftsteller theilen soll; so hat doch unser ehemalige hiesige Herr von Segner noch ein näheres Recht, darauf Ansprache zu machen, als H. Lorenz, und ich selbst habe anfangs nach dem Beyspiel des H. von Segner eben denselben Satz in der Lehre von den Parallellinien zum Grunde gelegt, (M. s. v. Segners Vorlesungen über die Rechenkunst und Geometrie, Lemgo 1747, Geom. 104. 105. §. 226. 227. S. Segneri Elementa

Arith.

Arithmeticae Geometriae et Calculi Geometrici, ſ. Curſus Math. P. I. Halae Magdeb. 1756. Geom. §. 9. 10. 11. pag. 144. 145. Conatuum praec. theor. parall. demonſtr. recenſio, Auctore Klügel, 1763. §. 12. 13. pag 16. 17. meine Praelect. Math. Theoreticae Elementaris, Roſtoch. et Wiſm. 1758. Geom. §. 73. pag. 34.)

49. §.

Eine andre Frage aber, worauf es hier hauptſächlich ankommt, iſt noch dieſe, ob denn der Segneriſche Grundſatz ſo leicht nach der Art, wie leipz. Mag. zur Nat. Math. und Decon. 2 St. 1781. S. 165. 1 Fall bewieſen werden könne, wie es uns der H. Recenſent verſichert. Ich vermuthe nicht ohne Grund, daß es ein Druck- oder Schreibfehler ſey, wenn aus dem leipz. Mag. S. 165. 1 Fall angeführt iſt, und daß 2ter Fall gemeint ſey. Iſt das wirklich die Meinung, ſo hat es allerdings ſeine Richtigkeit, daß der Segneriſche Grundſatz bewieſen ſey, ſo bald wir einen allgemeinen vom XI. Grundſatz beym Euklides unabhängigen logiſch richtigen Beweis des Satzes haben, daß grade linien, die mit einer dritten parallel laufen, unter ſich parallel ſind. Einen ſolchen Beweis, wie er hier gefodert wird, haben wir aber nicht in der angeführten Stelle des leipz. Magazins. (42. §.) Wenn der H. Recenſent aus dem erſten Fall des aus dem leipziger Magazin angeführten Satzes allein einen tüchtigen fehlerfreyen Beweis des Segneriſchen Grundſatzes folgern könnte; ſo würde ich ihm ſelbſt zur Ehre der erſten Erfindung deſſen, was hier geſucht wird, Glück wünſchen. Vielleicht iſt meine Vermuthung unrichtig, daß 1 Fall in der leipziger Gel. Zeitung ein Druckfehler ſey, der Herr Recenſent kann ſich gar wohl eine Figur ſo gezeichnet haben, daß es ihm geſchienen hat, als folge der Segneriſche Grundſatz ſchon aus der zum Grunde gelegten Prämiſſe:

Grade Linien, die mit einer dritten zwischen beyden befindlichen graden Linie parallel laufen, sind unter sich parallel

16. Fig. Man zeichne den spitzen Winkel ABC, und nehme den Punct P zwischen seinen Schenkeln, so kann man DE so ziehen, daß gewiß ein Punct C des Schenkels BC an einer Seite und ein Punct A des Schenkels BA an der andern Seite von DE seine Stelle erhalten. Wenn nun DE keine von beyden durch A und C laufenden graden Linien schnitte, so wären beyde mit EF parallel, diese Vergleichungsparallele wäre zwischen beyden befindlich, also wären jene nach leipz. Mag. a. a. O. 1 Fall unter sich parallel, der Voraussetzung entgegen. Wie aber, wenn in der 17 Figur ABC sehr stumpf und von 180° vielleicht weniger als ein Centilliontheilchen einer Tertie verschieden wäre? kann man auch nun auf jede durch P laufende grade Linie DE eben dieselbigen Schlüsse noch anwenden?

17. Fig.

50. §.

Im 78 Stück unsrer hiesigen Hallischen Neuen Gelehrten Zeitungen vom Jahr 1785, 622. u. f. S. stehet ebenfalls eine Anzeige der vom H. Lorenz verfaßten Elemente der Mathematik, und vornemlich wegen einer Stelle auf der 624 Seite, (die so anfängt: Inzwischen erklärte man nur die Lage grader Linien logisch richtig, u. s. w.) welche leicht die Vermuthung erregen könnte, daß ich Verfasser der Recension sey, finde ich mich bewogen, ihrer ebenfalls zu erwehnen. Ich nutze diese Gelegenheit, es ein für allemahl bekannt zu machen, daß ich weder an der hiesigen Hallischen Gelehrten Zeitung noch an irgend einer andern Wochen- Monaths- oder sonst periodisch Herauskommenden Zeitschrift, worin neue Bücher angezeiget und beurtheilet werden, Antheil habe. Mehrmals sind mir dergleichen Anträge gemacht worden, allein ich habe sie allemahl ablehnen müssen, weil ich weder Zeit

noch

noch Neigung zu dieser Art von Beschäftigung habe. Mehrmahls bin ich ersucht worden, Anzeigen von neuen Büchern in die hiesige Hallische Gel. Zeitung einrücken zu lassen: allein ich muß wegen der angeführten Gründe bitten, mich damit zu verschonen. Für jetzt nur eine Bemerkung, die Recension im angeführten 78 Stück der Hall Gel Zeit. betreffend.

Die Euclideischen Beweise empfehlen sich sowohl durch Simplicität, als durch Evidenz noch immer vorzüglich dem Anfänger, und es fehlte nur bisher daran, daß geweihte Hände jenes Muster dem Zustande der neuern Geometrie anpaßten. (a. a. O. 623. S.)

Wir haben also keinen Hausen gehabt, von dem man doch sonst glaubte, daß er so etwas auch geleistet hätte, keine Schüler von Hausen, auch sonst gar keine andre Schriftsteller, die jemahls daran gedacht haben, die Geometrie des Euklides der neuern einzuverleiben. (Man vergleiche oben den Zusatz zum 46. §. der 1. Abhandlung), oder deren Hände genug geweihet waren, daß sie so etwas hätten leisten können.

51. §.

Noch eine Stelle aus unsrer Hallischen Gelehrten Zeitung, die gleich nach der im vor. §. daraus angeführten folget.

Aber warum mag man „daß alle rechte Winkel gleich sind„ in jeder Geometrie als Lehrsatz beweisen? Sobald ich den rechten Winkel definire: er ist der vierte gleiche Theil des um seine Spitze befindlichen Flächenraums, so ist jenes Grundsatz, und versteht sich von selbst.

Wenn dem verewigten Euler etwas vorkam, das nicht recht nach seinem Sinne war, so pflegte er kurz zu erwiedern: so! das habe ich noch nicht gewußt. Ein Winkel ist also eine Fläche. Aber kurz vorhin hieß es doch „die Euklideischen Beweise empfehlen sich sowohl

durch Simplicität als durch Evidenz noch immer vorzüglich dem Anfänger, also doch auch wohl seine Erklärungen und seine Grundsätze, denn darauf beruhen die Beweise. Euklides giebt nach des H. Lorenz Uebersetzung diese Erklärungen.

8. Ein ebener Winkel ist die Neigung zweyer Linien gegen einander, wenn solche in einer Ebene einander berühren, ohne in einer graden Linie zu liegeu.

9. Sind die Linien, welche den Winkel einschliessen, grade; so heißt derselbe ein gradlinichter Winkel.

10 Stehet eine grade Linie auf der andern so, daß die Nebenwinkel gleich sind; so heißt sie senkrecht, (perpendicular) auf der andern, und jeder der beyden gleichen Winkel heißt ein rechter.

Also kein Wort davon, daß der Winkel eine Fläche sey.

Wenn nun gleich Euklides den Satz „alle rechte Winkel sind gleich„ unter den Grundsätzen aufführt, hat es denn keinen Nutzen für den Anfänger, wenn man ihm zeigt, wie der Grundsatz mit der Definition zusammen hänge? Wenn Euklides den Satz „von gleichen Dingen sind die dupla gleich„ als den 6sten Grundsatz aufführt, hat es nicht seinen Nutzen, wenn man dem Anfänger zeigt, daß dieser Grundsatz schon aus dem 2ten „gleiches zu gleichen addirt giebt gleiche Summen„ folge? Ist nicht auch das schon Uebung des Verstandes?

52. §.

Diese Stelle, den rechten Winkel betreffend, ist mir noch in andrer Absicht merkwürdig. Hier haben wir das Princip vortreflich angewandt:

Daß die Grösse eines ebenen Winkels durch die Grösse der Ebene bestimmt wird, die zwischen seinen ohne Ende verlängerten Schenkeln liegt,

wel-

welches Herr Hofprediger Schulz in seiner Entdeckten Theorie der Parallelen, nebst einer Untersuchung ihrer bisherigen Schwierigkeit, Königsberg 1784, zum Grunde gelegt hat. Der Inhalt dieses Buches, muß einen jeden recht sehr aufmerksam machen, der bisher geglaubt hat, in der Geometrie die Wahrheit ganz rein in ihrer ursprünglichen durch keinen äusserlichen Schmuck verstellten jungfräulichen Schönheit und Unschuld zu finden, wie sie Herr Professor Hindenburg im Euklides gefunden zu haben versichert. (Leipz. Magaz. 1 St. 1781. 159 S.) Bevor ich aber mehr davon sage, muß ich eine Stelle aus der Vorrede hieher setzen.

„Hiedurch greife ich indessen dem Urtheil meiner Leser so wenig vor, daß ich sie vielmehr ersuche, eine jede meiner drey Beweisarten aufs strengste zu prüfen. Ich suche Wahrheit. Ein jedes Urtheil, das nicht persönliche Beleidigungen, sondern Untersuchung der Sache, nicht dictatorischer Machtspruch, sondern mit wirklichen Gründen belegt ist, soll mir daher, so strenge es immer seyn mag, nicht nur höchst willkommen seyn, sondern auch in dem Vorberichte zu der allgemeinen Theorie der Lage, welche ich, so Gott mir das Leben fristet, ehestens herausgeben werde, die freundschaftlichste Beantwortung finden.„

Aeusserst ungern urtheile ich sonst über die Arbeiten andrer: allein diesesmahl ist mir nicht anders, als wenn Euklidens Schatten mich beunruhigte, und durchaus verlangte, daß ich dem würdigen Herrn Verfasser dieses Buches die Bedenklichkeiten bekannt machen solle, die mich abhalten, seiner Theorie von den Parallellinien beyzupflichten. Wenn es hier auf einen oder einige wenige Behauptungen ankäme, welche im wesentlichen des Systems selbst nichts änderten; so würde ich die Sache nicht für so wichtig halten. Allein es kommt hier auf eine richtige Anwendung der ersten geometrischen Grundbegriffe

und der damit verbundenen Grundlehren selbst an. Wenn wir es uns erlauben wollen, mit Euklids Elementen so umzugehen, wie ich es hier finde, so wird dieses Buch künftig kein besseres Schicksal als die Bibel erfahren. Leipziger Magazin 3 St. 1781. 372. S.) Herr Schulze trägt drey Beweisarten vor, wie er sie nennt, und ich werde seinem Vortraze nun Schritt vor Schritt folgen.

53. §.

Erste Beweisart.

1ste bis 4te Erklärung.

18. Fig. Was parallele und nicht parallele Linien, auch was gradlinichte Winkel sind, im wesentlichen, wie beym Euklides.

Die 4te Erklärung

ist dem H. Schulze eigen,

Den unbegränzten Theil der Ebene ACBA, der zwischen den Schenkeln des Winkels CAB ohne Ende fort enthalten ist, wenn diese ohne Ende verlängert werden, nennt er die Fläche des Winkels CAB.

Nun folgen vier Lehrsätze, wovon alles übrige abhängt: ich setze sie mit ihren Beweisen von Wort zu Wort hieher, um den Verdacht zu verhüten, daß etwas wesentliches von mir übersehen, oder wohl gar mit Vorbedacht von mir weggelassen seyn könnte.

1. Lehrsatz.

18. Fig. Wenn die Winkel CAB, cab, gleich sind, so sind auch ihre Flächen ACBA, acba gleich.

Beweis. Denn man lege den Winkel cab auf den Winkel CAB dergestalt, daß der Scheitel a in A, und der Schenkel ab in AB fällt, so kann der Schenkel ac weder innerhalb dem Winkel CAB, in AD fallen, weil

DAB

DAB < CAB, folglich auch kleiner als cab ist, noch auſserhalb dem Winkel CAB in AF, weil FAB > CAB, folglich auch grösser als cab ist, mithin fällt ac in AC, folglich deckt die Fläche des Winkels cab die Fläche des Winkels CAB. Also sind beyde Flächen gleich.

54. §.

Der H. Verfasser äussert in der Anmerkung nach dem 4 Lehrsatze, (70. S.) weil die Geometer die Flächen der Winkel bisher in keine Betrachtung gezogen hätten, so habe er für nöthig gehalten, die ersten 4 Lehrsätze, ob er sie gleich als Grundsätze hätte voraussetzen können, mit der grösten geometrischen Schärfe zu beweisen. Bey andern Geometern, welche eben das vortragen, was in dem Beweise richtig ist, leuchtet mir alles weit besser ein: ich finde auch nicht, daß hier mehr bewiesen sey, als was in allen guten Lehrbüchern weit deutlicher und richtiger bewiesen ist. Bis auf die letzte Schlußfolge

„folglich deckt die Fläche des Winkels u. s. w.„

wovon gleich nachher, ist nichts weiter bewiesen als dieses:

Wenn cab = CAB ist, und a auf A so gelegt wird, daß ab mit AB zusammen fällt, so muß ac mit AC zusammen fallen.

Das heißt kurz: gleiche Winkel gehörig auf einander gelegt decken einander. Der Beweis bey andern Geometern ist sehr scharf und einleuchtend, wenn sie so schlieſſen.

1) Winkel, die gehörig auf einander gelegt einander decken, sind gleich groß. (Eukl. 8. Grundſ.)
2) Winkel, die Spitze auf Spitze, und ein Paar Schenkel auf einander gelegt, einander nicht decken, sind ungleich groß: weil nun der eine ganze Winkel einen Theil des andern deckt.
3) Gleiche Winkel also gehörig auf einander gelegt decken einander: denn widrigenfalls wären sie ungleich. (n. 2.)

Das

Das ist auch der Sinn des ganzen Beweises bis auf die letzte Schlußfolge:

„folglich deckt die Fläche des Winkels cab die Fläche des Winkels CAB.„

Diese ist eben das eigenthümliche des 1 Lehrsatzes, wie sich auch aus der Art hervorgiebt, wie H. Schulze im folgenden den Lehrsatz anwendet. Hier sollte sich also die Schärfe des Beweises vorzüglich zeigen. Allein es findet sich auch nicht das allergeringste was diese Folge rechtfertiget: also wird es mir erlaubt seyn, ihre Richtigkeit schlechterdings zu leugnen.

Die Winkelflächen (4. Erkl.) lassen sich nach dem Grundsatze der Congruenz keinesweges vergleichen. Euklides giebt zwar keine Erklärung von dem, was wir durch das Wort congruiren, einander decken, auf- und in- einander passen, ausdrücken: aus der Anwendung aber, die er von seinem 8. Grundsatze im 1. Buche macht, siehet man deutlich genug, daß er diesen Ausdruck so wolle verstanden wissen, wie die Herrn Hausen (Elementa Matheseos, Geom. Axioma IV. Schol pag. 93.) und Kästner (Anfangsgr. der Arithm. und Geom. im 3. Grundsatze der Geom. 170. S. der dritten Aufl.) sich darüber erklären. Ausgedehnte Grössen congruiren, wenn sie zwischen einerley Gränzen enthalten sind. Wenn zwey Flächen zwar an einer Seite begränzt, an einer andern Seite aber unbegränzt sind, und wenn man gleich alsdenn wohl einsiehet, daß die Gränzen der einen, so weit sie vorhanden sind, mit den Gränzen der andern zusammen fallen können; so fällt doch alle Idee vom congruiren an der unbegränzten Seite weg. Es soll alles zusammen fallen, was zwischen den Gränzen enthalten ist: wo aber keine Gränzen sind, da kann man auch keine Vorstellung von dem haben, was dazwischen enthalten ist.

H. Schulze dringt an vielen Stellen in der Einleitung darauf, daß der Mathematiker intuitive Erkenntniß ver-

verlange: ich gestehe aber gern, daß ich nicht begreife, wie die unendliche Winkelfläche anschaulich gemacht werden solle. H. Schulze kann nur fodern, man solle sich die Schenkel ohne Ende verlängert, und eben so die Fläche zwischen ihnen der Spitze gegen über ohne Ende vergrössert, auch nach beyden Schenkeln zu, (denn diese gehen ebenfalls ohne Ende auseinander) erweitert vorstellen. Heißt das die unendliche Winkelfläche anschaulich darstellen?

Die Gränzen der Winkel sind ihre Seitenlinien, und bey der Frage, ob die Winkel gleich oder ungleich groß sind, ob sie einander decken, oder nicht, kommt die Länge der Seitenlinien in keine Betrachtung, sondern nur die mehrere oder mindere Abweichung der einen von der andern. Wenn Spitze auf Spitze liegt, und die Schenkel aneinander schliessen, so weichen die Schenkel beyder Winkel gleichweit von einander ab. Wie lang oder kurz die Schenkel auch seyn mögen, wie groß oder klein die Fläche sey, darauf kommt nichts an. Es fällt auch niemanden ein, an die Fläche hiebey zu denken. Jedermann im gemeinen Leben beurtheilet die Grösse eines Winkels, den etwa ein Paar Stäbe mit einander machen, daraus, ob er mehr oder weniger offen ist.

Ich muß meine Leser ersuchen, es sich nicht befremden zu lassen, daß ich hier die allerleichtesten Elementarsätze der Geometrie so umständlich erörtere: das weiter folgende wird es bald ergeben, wie sehr vieles darauf ankomme, in welchen Sinne H. Schulze gleich seinen ersten Lehrsatz bewiesen habe. Man könnte ihm die Freyheit lassen, an die Fläche zwischen den Schenkeln, und wenn es ihm evident schiene, an die unendlich grosse Fläche und an unendlich lange Schenkel allemahl zu denken, wenn vom Winkel die Rede ist: allein die Anwendung welche er davon macht, ist äusserst unerwartet: also gleich eine kleine Probe davon.

In der 13 Figur ist der Winkel FBD = ECD, also die Fläche des Winkels FBD = der Fläche des Winkels ECD. (1 Lehrsatz.) Aber die Fläche FBD = der nach E und F hin unbegränzten Fläche FBCE + der Fläche ECD, folglich die Fläche FBCE + Fläche ECD = Fläche ECD. Man subtrahire ECD auf beyden Seiten, so findet man die Fläche FBCE = 0.

Wenn ich gegen H. Schulze so schliessen wollte, so hätte ich den stärksten Verdacht gegen mich, daß es Chikane, gänzliche Verdrehung des Sinnes sey, in welchem der 1 Lehrsatz sey bewiesen worden: und doch ist nichts gewisser, als daß H. Schulze selbst solche ganz unerwartete Anwendungen von seinen 1sten Lehrsatze machet.

55. §.

2. Lehrsatz.

18. Fig. Wenn der Winkel cab grösser ist, als der Winkel DAB; so ist auch des erstern Fläche acba grösser, als des letztern Fläche ADBA.

Beweis Denn man lege den Winkel cab auf den Winkel DAB so, daß der Punct a in A und der Schenkel ab auf AB fällt; so kann der Schenkel ac nicht in den Schenkel AD fallen, weil sonst cab = DAB wäre. Eben so wenig kann ac innerhalb dem Winkel DAB in AI fallen, weil sonst cab kleiner, als DAB wäre. Mithin fällt der Schenkel ac ausserhalb dem Winkel DAB in AC, folglich ist die Fläche des Winkels DAB ein Theil der Fläche des Winkels cab. Also ist die Fläche acba gröser als die Fläche ADBA.

Bis auf die letzte Schlußfolge:

„folglich ist die Fläche des Winkels DAB ein Theil u. s. w.„

steht wiederum alles in jedem Handbuche der Geometrie, und was in diesem Beweise liegt, daß muß in einer verständlichen geometrischen Sprache so lauten:

2) Wenn die Winkel ungleich sind, so können sie einander nicht decken. Legt man Spitze auf Spitze und überdem das eine Paar Schenkel aneinander; so fällt der andre Schenkel des grössern Winkels über den andern Schenkel des kleinern hinaus.

Die Richtigkeit der letzten Schlußfolge wird wegen der im vor. §. umständlich ausgeführten Gründe schlechterdings geläugnet. Unbegränzte Flächen kann man nicht vergleichen, die eine ist weder grösser noch kleiner noch eben so groß als die andre. Grössen die man vergleichen soll müssen endlich seyn: unendliche Grössen lassen sich gar nicht vergleichen.

Der 3. und 4. Lehrsatz

sind die vorigen beyden, umgekehrt, und fallen eben darum in dem Sinne, wie sie H. Schulze anwendet, schlechterdings weg, weil die beyden ersten nicht bestehen können. Sie lauten so:

3) Wenn die Flächen zweyer Winkel gleich sind, so sind die Winkel selbst gleich: weil wenn die Winkel ungleich wären auch die Flächen ungleich seyn müsten. (2. Lehrsatz.)

Soll der Satz nicht ganz unbrauchbar seyn, so kann er keinen andern Sinn haben, als diesen:

3) Wenn man aus andern Gründen weiß, daß nothwendig beyde Paare Schenkel zusammen fallen müssen, wenn Spitze auf Spitze und ein Paar Schenkel aneinander gelegt wird; so sind die Winkel gleich. Also ist es unmittelbare Anwendung von Euklids 8 Grundsatz auf Winkel.

4) Wenn

4) Wenn die Fläche des einen Winkels grösser als die Fläche des andern ist; so ist auch der erste Winkel grösser, als der andre Winkel. Denn wenn die Winkel gleich wären so wären die Flächen gleich; (1 Lehrsatz) und wenn der erste Winkel kleiner als der andre wäre, so wäre des erstern Fläche kleiner als des andern Fläche. (2 Lehrs.)

Soll der Satz nicht ebenfalls ganz unbrauchbar seyn, so muß er den nachstehenden Sinn haben:

4. Wenn aus andern Gründen erhellet, daß bey eben der Voraussetzung wie n. 3. es solle Spitze auf Spitze und ein Paar Schenkel aneinander liegen, das andre Paar nicht zusammen fallen kann; so ist der Winkel grösser, dessen Schenkel über den Schenkel des andern hinausfällt.

Aus den beygefügten Beweisen, so wie sie Herr Schulze selbst führet, erhellet, daß der Sinn der Sätze n. 3. 4. schlechthin von dem Sinne der beyden ersten Lehrsätze abhänge. Wenn der Sinn, worin die 1sten beyden Lehrsätze genommen werden sollen, mit allen sonst angenommenen geometrischen Grundlehren streitet; so kann auch der Sinn des 3ten und 4ten Lehrsatzes kein andrer seyn, als der, welchen ich hier angegeben habe. Die Winkelflächen gehören schlechterdings nicht hieher, (54. §.) oder höchstens nur soweit als sie begränzt sind: weil aber diese Flächen nicht ganz begränzt sind, so kann hier keine Frage davon seyn, ob sie gleich oder ungleich groß sind. Nur begränzte oder wie man sonst spricht, endliche Grössen kann man vergleichen, beym Unbegränzten hört alle Vergleichung auf. (1 Abhandlung 34. 35. §.) Bey andern Schriftstellern erscheinen diese ersten 4 Lehrsätze in einem ganz andern Lichte. Die Sätze n. 3. 4. trägt man zuerst vor, wie ich es schon im 54. §. bemerkt habe. Der Satz n. 3. ist unmittelbare Anwendung des Grundsatzes der Congruenz, der Satz n. 4. folgt daraus,

weil

weil nach der zum Grunde liegenden Voraussetzung ein Theil des einen Winkels den andern ganzen Winkel deckt. Die Sätze n. 1 und 2 folgen aus 3 und 4. nach der oben im 37. §. von mir angezeigten Art zu schliessen. Aus diesem allen ergiebt sich zur Genüge was vom Inhalt der

Anmerkung

beym 4 Lehrsatze (70. S.) zu halten sey. Das Decken der Winkel ist ganz was anders als das Decken der Flächen. Winkel decken einander, wenn Spitze auf Spitze liegt, und die Schenkel an einander schliessen, diese mögen lang oder kurz, gleich oder ungleich lang seyn: bekanntermassen ist es gar nicht nöthig, daß die Endpuncte auf einander fallen. Ob die Winkelflächen einander decken, davon kann gar keine Frage seyn, weil wenigstens an einer Seite der Spitze gegenüber keine Gränzen sind, die zusammen fallen könnten.

56. §.

Wenn man Winkelflächen und Winkel als gleichgültige Dinge ansiehet, und wenn man sich erlaubt, unbegränzte Flächen zu addiren, auch eine von der andern zu subtrahiren; so gehet es freylich mit den Beweisen der folgenden Lehrsätze vortreflich von statten.

5. Lehrsatz.

Wenn grade linien CF, CD, die einander selbst in C schneiden, von einer dritten MB in A und I geschnitten werden; so ist der äussere Winkel CIB grösser, als der entgegen gesetzte innere CAB. 19. Fig.

Beweis. Man verlängere FC willkührlich bis N, und ziehe durch N und I die grade linie NQ; so bestehet die Fläche des Winkels MID aus der Fläche des Winkels MAF, aus der unbegränzten Fläche FAIQ und aus der Fläche des Winkels QID, folglich ist die Fläche des

Winkels MID grösser als die Fläche des Winkels MAF, weil das ganze grösser, als ein Theil desselben ist, also ist auch der Winkel MID grösser als der Winkel MAF nach dem 4. Lehrsatz. (so wie ihn H. Schulze verstehet und angewandt wissen will) Weiter ist MID = CIB, wie man sonst weiß, und MAF = CAB, also auch CIB > CAB.

57. §.

Gegen den Lehrsatz selbst ist nichts zu erinnnern, weil ihn Euklides (1 Buch 16 Satz) unabhängig von seinem XI. Grundsatz völlig scharf bewiesen hat: desto mehr aber gegen den hier vorgetragenen Beweis.

1. Auf der 58. Seite sagt Herr Schulze, daß in seiner ganzen ersten Beweisart der Theorie der Parallellinien, welche eben diejenige sey, die in einem Euklideischen System der Geometrie vorzugsweise vor den beyden übrigen gewählt werden müsse, die Unendlichkeit der Winkelflächen in gar keine Betrachtung komme, sondern die Grösse derselben so, wie bey jeder endlichen Fläche beurtheilet werde. Wie das behauptet werden könne, weiß ich nicht, da doch die Beweise der ersten vier Lehrsätze sich ganz eigentlich darauf gründen, daß man sich sowohl die Schenkel des Winkels, ohne Ende verlängert als auch die Fläche, welche zwischen den Schenkeln ohne Ende fort enthalten ist, eben so vorstellen muß Einmahl ist das der im 53. §. angeführten 4 Erklärung von dem was Winkelfläche sey, gemäß. Ferner kommt in den Beweisen der ersten beyden Lehrsätze, wovon die Beweise des 3 und 4. Lehrsatzes abhängen, alles darauf an, ob die Fläche des einen Winkels die Fläche des andern deckt oder nicht deckt: hier muß doch wohl das Wort Fläche des Winkels so verstanden werden, wie es der unmittelbar vorhergehenden 4 Erklärung gemäß ist. Wenn auch dieser Sinn des Wortes Winkelfläche nicht vorausgesetzt wird; so fällt vollends aller Schein eines Beweises der bey=

beyden ersten Lehrsätze weg. Ist es nicht nothwendig, daß man sich Schenkel und Fläche unendlich groß denke, so kann man ihnen ja ganz willkührliche Gränzen geben, wie BGHC, FKLME; (20 Fig.) und BGHKC, FMNOE: (21 Fig.) werden nun die Flächen der gleichen Winkel BAC, FDE einander noch decken? wird die Fläche des grössern Winkels FDE noch grösser seyn, als die Fläche des kleinern BAC? Wenn gleich im Beweise des 5 Lehrsatzes das Wort unendlich nicht steht, so ist doch die Sache da: denn nur diese Vorstellung bringt einigen wiewohl freylich nur scheinbaren Zusammenhang in den Beweis hinein, und die letzte hier im 56. §. mit andrer Schrift gedruckte Schlußfolge beruhet einzig und allein auf dem 4 Lehrsatze.

58. §.

2. Die im 54 und 55. §. vorgetragenen Gründe gegen die Gültigkeit der Beweise des 1 und 2. Lehrsatzes sind zugleich eben so viele Gründe gegen die Gültigkeit des Beweises dieses 5 Lehrsatzes: also könnte das bisherige schon genügen, um die Ungültigkeit der ersten Beweisart darzulegen. Es kommt nemlich alles darauf an, ob der Schluß gelte: ein Winkel ist grösser als ein andrer, also die Fläche des ersten grösser, als die Fläche des andern; (2 Lehrs.) auch wieder umgekehrt: die Fläche des einen ist grösser als die Fläche des andern Winkels, also der erste Winkel grösser, als der andre (4 Lehrs.) Ich will diese Art zu schliessen völlig so, wie es H. Schulze macht, auf den folgenden

6 Lehrsatz und die 1 Aufgabe

anwenden, so kann ich beweisen, daß in dem Lehrsatze eine unmögliche Bedingung zum Grunde liege, und daß die Auflösung der 1 Aufgabe unmöglich sey. Jenes ist der bekannte Lehrsatz.

22. Fig. Wenn AB, CD, von KL in G und F so geschnitten werden, daß

1. KGD = KFB
oder 2. CGL = KFB
oder 3. LGD + KFB = 2 R ist;

so sind AB und CD parallel. Ich sage

1. Es kann unmöglich KGD = KFB angenommen werden. Denn die Winkelfläche KFB bestehet aus der Winkelfläche KGD und der unbegränzten Fläche zwischen GF, GD, FB, also ist die Fläche des Winkels KFB grösser als die Fläche des Winkels KGD, folglich auch der Winkel KFB > KGD. (4 Lehrs.)

2. Es kann unmöglich CGL = KFB angenommen werden. Denn vermöge des bewiesenen n. 1. ist KFB > KGD: sollte nun CGL = KFB seyn, so wäre auch CGL > KGD, und das streitet mit dem bekannten Lehrsatz, daß CGL = KGD seyn müsse.

3. Es kann unmöglich LGD + KFB = 2 R angenommen werden. Denn es ist KFB > KGD (n. 1.), also wäre LGD + KFB > LGD + KGD. Aber LGD + KGD = 2 R, weil es Nebenwinkel sind, mithin allemahl LGD + KFB > 2 R.

22. Fig. Die 1. Aufgabe lehrt nach dem Euklides durch G mit AB eine Parallellinie zu ziehen. Man soll nemlich die Wechselswinkel CGL, KFB, gleich groß machen, welches vermöge des bewiesenen (n. 2.) unmöglich ist.

59. §.

Sollten diese Verwirrungen, welche die Lehrsätze des H. Schulze, so wie er sie selbst anwendet, ganz augenscheinlich anrichten, ihn nicht aufmerksam machen. Petrus Ramus hat, wie H. Schulze auf der 30. S. anführt, durch seine philosophischen Grundsätze, wodurch er die Geometrie zu erleichtern dachte, ihr ihre ganze Würde genommen, indem er ihre Evidenz ganz zu Grun-

de

de richtete. Sollte mein bisheriger Vortrag nicht beym H. Schulze auch für jetzt allererst nur den entfernten Verdacht erregen, daß er selbst in der Gefahr sey, indem er durch seine vermeinten neuen Lehrsätze die Geometrie aufzuklären denkt, nicht allein die Evidenz sondern das ganze System selbst zu Grunde zu richten! Sein ganzer bisher von mir berührter Vortrag enthält nicht das mindeste, das ihm dienen könnte, die von mir im vor. 58. §. aus seinem System richtig hergeleiteten anstössigen Folgerungen abzulehnen. Eine Gegenerwiederung bleibt ihm zwar übrig, die sich aber auf etwas gründen muß, wovon bisher noch nichts erwehnt ist. Bey der zweyten und dritten Beweisart wird es vorkommen, darum berühre ich es hier nur kurz, damit es nicht scheine, als hätte ich es übersehen. H. Schulze wird erwiedern: die unbegränzte Fläche BFGD sey eine wahre Null gegen die Winkelfläche KGD, und könne sie weder vermehren noch vermindern. Ich behalte mir also vor, bald nachher zu zeigen, daß der Beweis, welchen H. Schulze weiter unten für diese Behauptung vorträgt, nicht einmahl nach dem bisherigen höchstunvollkommenen algebraischen Sprachgebrauch in der Lehre vom Unendlichen, und noch vielweniger geometrisch richtig sey.

60. §.

Der 7 Lehrsatz.

ist Euklids XI Grundsatz: wenn CF, GD, von MB in A und I so geschnitten werden, daß GIB > CAB ist; so laufen FC, DG, nach C und G verlängert zusammen. 23. Fig.

Beweis. Wenn dieses nicht erfolgte, so bliebe IG ohne Ende fort beständig auf eben derselben Seite von AC, folglich ohne Ende fort innerhalb der Fläche des Winkels CAB, mithin wäre die Winkelfläche GIB ein Theil der Winkelfläche CAB. Aber der Winkel GIB >

CAB (hyp.) also auch die Winkelfläche GIB > CAB, (2. Lehrs.) mithin ein Theil grösser als das Ganze. ꝛc.

Wenn nur der letzte Widerspruch so offenbar aus den Prämissen folgte, als er selbst offenbar ist; so wollte ich der erste seyn, der dem H. Schulze den wärmsten Dank bezeugte, daß er uns eine Schwierigkeit glücklich gehoben hätte, die so lange ein Stein des Anstosses gewesen ist. Allein was ich einzuwenden habe, das ergiebt sich nun aus dem vorhergehenden von selbst. 1) Die Winkelflächen BiG, BAC, sind beyde unbegränzt, (4. Erkl.) also lassen sie sich nach sonst bekannten Grundsätzen, die nur für endliche Grössen gelten, nicht vergleichen. Der Schluß folgt nicht, weil der Winkel GiB > CAB seyn soll, so ist auch die Winkelfläche GIB > die Winkelfläche CAB, denn der Beweis des 2. Lehrsatzes ist ganz ungültig. Wird dieser Lehrsatz zugestanden, so kehre ich nach dem 4. Lehrsatz, der aus jenem folgen soll, das ganze Argument um, und beweise, daß es unmöglich sey, anzunehmen, es könne GiB > CAB seyn.

Die Fläche des Winkels CAB bestehet aus der Fläche CAiG und aus der Fläche GiB, also ist die Winkelfläche CAB als das Ganze > die Winkelfläche GiB, die von jener nur ein Theil ist: mithin ist nach dem 4. Lehrsatz allemahl der Winkel CAB > GIB, und die Bedingung des Lehrsatzes, daß GIB > CAB seyn soll, ist unmöglich. Will H. Schulze erwiedern, zur Winkelfläche GIB gehöre noch ein grosses Stück jenseits AC, welches weit mehr betrage, als was zwischen Ai, AC, IG, liegt; so antworte ich, das sey grade das, was allererst bewiesen werden sollte. Man kann nicht wissen, ob jenseits AC noch etwas zur Winkelfläche BIG gehört, bevor man weiß, daß IG und AC einander schneiden, und grade das sollte bewiesen werden.

61. §.

Man übersetze den vermeinten Beweis dieses 7. Lehrsatzes aus der Sprache des H. Schulze in die richtige geometrische Sprache, und wende den 4. Lehrsatz in seinem richtigen Sinne an, wie er in allen guten Lehrbüchern angewandt wird; so zeiget sich alles in seinem rechten Lichte. Wenn IG und AC einander nicht schnitten, so bliebe IG, wie man will verlängert, allemahl zwischen den Schenkeln des Winkels CAB. Wenn nun weiter geschlossen wird

mithin wäre die Winkelfläche GIB ein Theil der Winkelfläche CAB,

so heißt das:

mithin würde IG auch zwischen AC und AB liegen bleiben, wenn man I auf A und IB an AB anlegte. (Wie folgt das?)

Wäre diese Folge richtig, so würde man weiter schliessen können, also wäre der Winkel GIB nur ein Theil des Winkels CAB. Aber jene Folge ist mit nichts bewiesen. Die bekannte Einwendung gegen andre ähnliche Versuche diesen Satz zu beweisen behält ihre ganze Kraft: es könnte sich IG der AC als einer Asymtote nähern, und wenn man I auf A, IB an AB anlegte, so könnte IG dieser Voraussetzung unbeschadet doch über AC hinausfallen.

62. §.

Die dem 7. Lehrsatze beygefügte Anmerkung übergienge ich sehr gern mit einem gänzlichen Stillschweigen: denn ich zweifle gar nicht, daß der würdige Herr Verfasser, der so feyerlich versichert, daß es ihm um Wahrheit, um augenscheinliche, anschauliche Wahrheit zu thun sey, von selbst schon geneigt seyn werde, solche Behauptungen zurück zu nehmen, als ich hier zu meiner äussersten Befremdung lese. Eine Stelle aber auf der 78 und 79 S.,

womit auch die 62 Seite zu vergleichen ist, kann ich nicht ganz unberührt lassen, weil sie einen gar zu wesentlichen Zusammenhang mit dem übrigen hat. Der Herr Verfasser hat, wie diese Stelle ungemein einleuchtend zu erkennen giebt, das äusserst mangelhafte seiner Schlüsse selbst gefühlt, und hat hier Einwendungen begegnen wollen, wovon er voraus sahe, daß sie jedem Leser, der nicht alles ohne Prüfung anzunehmen gewohnt sey, beyfallen müsten. Diesen Einwendungen muste begegnet werden, und sollte auch als ein neuer Grundsatz behauptet werden müssen, daß ein Theil dem Ganzen gleich seyn könne. Euklidens 9 Grundsatz, das Ganze sey grösser als sein Theil, ist nicht mehr wahr, sondern nur unter der Einschränkung, wenn sein Nebentheil gegen ihn nicht unendlich klein ist: es muß also heissen: das Ganze ist entweder grösser als sein Theil, oder ihm gleich.

63. §.

Man verändere die Bedingung des 7. Lehrsatzes, und fasse ihn so:

24. Fig. Wenn CF, GD, von MB in A und I so geschnitten werden, daß GIB = CAB ist, so lauten FC, DG nach C und G verlängert zusammen.

Der Beweis hievon kann völlig so aus der Natur der Winkel bewiesen werden wie der Beweis im 60. §. geführt ward. Wenn nemlich FC, DG, nicht zusammen liefen, so bliebe IG ohne Ende fort innerhalb der Fläche des Winkels CAB, mithin wäre die Winkelfläche GIB ein Theil der Winkelfläche CAB. Aber der Winkel GIB = CAB (hyp.), also auch die Winkelfläche GIB = CAB, (1 Lehrs.) mithin wäre ein Theil den ganzen gleich, dem 9 Grundsatz beym Euklides entgegen.

Herr Schulze sahe also ein, daß man nach seinen Lehrsätzen, und nach der Art wie er sie anwendet, grade das Gegentheil dessen beweisen könne, was seinem eige-

nen

nen Geständnisse nach (Anm. zum 5. Lehrs. 71. S.) Euklides im 16. Satz des 1. B. in aller Schärfe bewiesen hatte, auch grade das Gegentheil dessen, was Herr Schulze selbst in seinem 5ten Lehrsatze aus der Natur der Winkel aufs schärfste bewiesen zu haben glaubte: und doch ward ihm diese Natur der Winkel, oder vielmehr der Winkelflächen, so wie er sie festgesetzt zu haben glaubte, nicht verdächtig? Freylich wohl, aber der Sache war noch zu helfen, es durfte nur behauptet werden, ein Theil könne dem ganzen gleich seyn, so war der letzte hier geführte Beweis entkräftet. Indessen soll dieses doch nur so seyn können, wenn der Nebentheil Null ist, oder wenn man will, gegen das Ganze Null oder unendlich klein ist: also hätte doch bewiesen werden müssen, daß zwar in der 24sten Figur der Nebentheil AIGC gegen das Ganze Null, aber in der 23 Fig. eben dieser Nebentheil AIGC gegen das Ganze nicht Null sey, wenn man beydemahl voraussetzt, daß IG, AC einander nicht schneiden.

64. §.

Ich habe den Beweis des 7 Lehrsatzes im 60. §. treulich abgeschrieben, es ist aber nicht das geringste in dem ganzen Beweise zu finden, woraus erhellen könnte, daß unter obiger Voraussetzung in der dazu gehörigen 23 Fig. AIGC nicht = o sey. Die Annahme ist im 63. §. so, wie im 60sten §; und es folgt daraus hier eben so, wie dort, es müsse IG ohne Ende fort innerhalb des Winkels CAB bleiben; daraus wird grade zu geschlossen, also wäre die Winkelfläche GIB ein Theil der Winkelfläche CAB; warum folgt denn das auch nicht in dem Fall der 24 Figur? Warum scheint es hier nur zu folgen? wie es auf der 79 Seite zugegeben wird. Die hieher gehörige Stelle lautet so:

> daß aber in diesem Falle, (nemlich GIB = CAB, 24. Fig.) die Fläche des Winkels GIB in der That der Fläche des Winkels CAB, von welcher sie nur ein Theil zu seyn scheint, gleich sey, ist unmittelbar aus dem

1 Lehrsatze klar, also ist dieses einer von den Fällen, wo der Theil dem Ganzen gleich ist, wie in der zweyten Beweisart noch deutlicher gezeiget werden soll.

Weder im 1 Lehrsatz, noch im Beweise desselben ist das geringste zu finden, woraus das hier behauptete klar seyn könnte. Der Lehrsatz sagt, wenn die Winkel gleich sind, so sind ihre Flächen gleich, und die 4te Erklärung sagt, Fläche des Winkels sey der zwischen den Schenkeln des Winkels befindliche Theil der Ebene. Was also (24 Fig.) zwischen A1, AC, 1G, liegt, gehört nicht zur Winkelfläche GIB, wohl aber zur Winkelfläche CAB. Nach dem Beweise des ersten Lehrsatzes heißt die Redensart: gleicher Winkel Flächen sind gleich, nichts anders, als gleiche Winkel so auf einander gelegt, daß Spitze auf Spitze und ein Paar Schenkel an einander liegt, decken einander, so daß auch das andre Paar Schenkel an einander schließt. Hier ist nichts zu finden, woraus erhellen könnte, daß in dem Fall der 24 Figur ein Theil dem ganzen gleich sey: also muß man es von der zweyten Beweisart wohl erwarten.

65. §.

Wenn aber bey der zweyten Beweisart ein so schlimmer Fehler in den Schlüssen zum Grunde liegt, daß ihn keiner verkennen kann, der nicht entweder eine gänzliche Unbekanntschaft oder eine viel zu unvollkommene und flüchtige Bekanntschaft mit den ersten Gründen der so genannten Rechnung des Unendlichen verrathen will; (denn darauf kommt, wie sich gleich weiter zeigen wird, alles an) so wird ein Mann wie Herr Schulze, der Wahrheit sucht, (M. s. die Vorrede 4. S.) gewiß diese vermeinte Theorie aufgeben. Wenn der Mathematiker, wie H. Schulze mehrmahls selbst versichert, nicht einmahl mit discursiven Schlüssen nach allgemeinen Begriffen zufrieden ist; so wird er sich noch vielweniger mit blossen Versicherungen davon, daß ein Beweis in der grössesten Stren-

ge

ge geführt sey, beruhigen, und wenn die Versicherungen noch so feyerlich wären. Ich finde nichts beym bisherigen Vortrage der ersten Beweisart, das mich nöthigte, die Fläche AIGC (24. Fig.) für Nichts anzunehmen: also bleibt mir frey, nach den eigenen Lehrsätzen des H. Schulze, und nach der Art, wie er sie anwendet, den nachstehenden Satz zu beweisen.

Wenn zwo Parallellinien AB, CD, von einer dritten KL in G und F geschnitten werden, so ist 22. Fig.

1. der äussere Winkel KGD kleiner als der innere KFB,
2. die Wechselswinkel CGL, KFB, sind ungleich,
3. beyde innere Winkel LGD, KFB sind zusammen grösser, als zwey rechte Winkel.

Beweis. 1. Die Winkelfläche KGD ist ein Theil der Winkelfläche KFB, also die erste kleiner als die letzte, (Euklids 9 Grundsatz, der so lange gilt, bis bewiesen ist, daß der Nebentheil BFGD = 0 sey, ein Nebentheil, der gleichwohl unendlich groß ist.) Folglich auch der Winkel KGD < KFB. (2 Lehrsatz.)

2. Ferner ist CGL = KGD, also auch CGL < KFB.

3. Weiter ist KFB > CGL, (n. 2.) also KFB + LGD > CGL + LGD. Weil nun CGL + LGD = 2 R, so ist auch KFB + LGD > 2 R.

66. §.

Der 8 Lehrsatz.

ist nächst dem 7ten der Hauptsatz der ganzen Theorie, und man sucht eben darum einen Beweis des 7ten Lehrsatzes, weil man hiernächst daher den Beweis des 8ten nehmen kann. Wenn nemlich AB und CD Parallellinien sind, so soll man beweisen, es sey

1. KGD = KFB,
2. CGL = KFB,
3. KFB + LGD = 2 R.

Aber

Aber nach eben den Lehrsätzen, und nach eben der Art wie sie Herr Schulze anwendet, um den 7ten Lehrsatz zu beweisen, kann man beweisen, daß von allen dreyen Behauptungen das Gegentheil wahr sey. (65. §.) Hier ist nun wohl an keinen Ausweg weiter zu denken, wofern uns die zweyte Beweisart nicht hilft. Vorläufig noch eine kleine Bemerkung. In der zweyten Beweisart kommt doch wie Herr Schulze selbst auf der 58. und 59. Seite bemerkt, bey Vergleichung der Winkelflächen der Begriff des Unendlichkleinen und Unendlichgrossen vor. Wie stimmt das nun mit der ebendaselbst kurz vorhergehenden Versicherung überein, daß in der ganzen ersten Beweisart die Unendlichkeit der Winkelflächen in keine Betrachtung komme, sondern ihre Grösse eben so, wie bey jeder endlichen Fläche beurtheilet werde? Wenn das richtig ist, so bleibet alles das, was ich bisher gegen die erste Beweisart vorgetragen habe, in seiner vollen Kraft. Denn unter dieser Bedingung weiß ich nichts von einem Nebentheile, der gegen sein Ganzes verschwindet. Unter dieser Bedingung scheint es nicht allein so, sondern es streitet wirklich mit dem Augenschein, daß die Fläche des Winkels GIB der Fläche des Winkels CAB gleich seyn solle. Also nun

die zweyte Beweisart.

67. §.

Es bleibt bis zum 6 Lehrsatz alles so wie in der ersten: alsdenn aber folgt

7. Lehrsatz.

25. Fig. Wenn in einer Ebene zwo grade linien FC, LK, von einer dritten MB in A und I dergestalt geschnitten werden, daß der äussere Winkel dem entgegen gesetzten innern gleich ist; so ist die Fläche CAIK, welche zwischen AI und den beyden linien AC, IK, enthalten ist, nach

der

der Seite C, K, hin unbegränzt, und diese unbegränzte Fläche CAIK ist gegen die Fläche des Winkels KIB ein völliges Nichts.

Beweis. Denn wenn KIB = CAB ist, so sind AC, IK, parallel, also die Ebene CAIK nach C und K hin unbegränzt. Mithin ist die Fläche CAB = KIB + CAIK. Nun aber ist die Fläche CAB = KIB, (das soll nach H. Schulze aus dem 1 Lehrs. folgen: allein ich habe gezeigt, daß es schlechterdings nicht ehe daraus folgen könne, bevor bewiesen ist, daß der Nebentheil CAIK = o sey; auch fand sich S. 79. das Versprechen, das solle in der zweyten Beweisart noch deutlicher gezeigt werden. M. s. oben dem 64. §. Wir sind aber sehr geschwinde fertig; denn aus den beyden Sätzen KIB = CAB, und CAB = KIB + CAIK, soll nun ohne weitere Umstände nach Eukl. 1. Grundsatz 1. B. folgen), also ist die Fläche KIB = KIB + CAIK, und nun weiter nach Eukl. 3. Grundsatz die Fläche CAIK = o.

68. §.

Einmahl haben wir also in diesem nach der beygefügten Anmerkung mit der grösten geometrischen Strenge abgefaßten Beweise nur den kleinen Fehler, wie schon bemerkt ist, daß das, was allererst bewiesen werden sollte, schon als bekannt vorausgesetzt wird. Wenn uns aber die vorgetragenen Schlüsse auch richtig bis zu der Folge geführt hätten: KIB = KIB + CAIK; so müsten wir doch wohl ein wenig inne halten, um zu sehen, wie es nun weiter gehen müsse. Die Folge CAIK = o wird jeder für unmöglich halten, der sie nicht wegen andrer vorgefaßter Begriffe schon zum voraus als richtig angesehen hat, zumahl wenn er bedenkt, daß diese Folge nicht allein richtig seyn müste, wenn AI in einer Zeichnung auf dem Papier einen oder wenige Zolle lang ist, sondern auch alsdenn, wenn gleich AI eine Länge von

Cen-

Centillionen Erdbahn-Durchmessern hätte. In der beygefügten Anmerkung wird uns H. Schulze wohl zurechthelfen, und es findet sich auch auf der 92 und 93 Seite etwas, das uns alle Zweifel benehmen soll. Unser Schlußsatz CAIK = o soll nicht den Sinn haben, als wäre diese Fläche eine absolute Null, der H. Verfasser erkennet selbst, daß es auf den Fall ein Widerspruch wäre, sie eine Grösse zu nennen. Allein wo ist auch nur die geringste Spur in dem ganzen Beweise davon zu finden, daß der Schlußsatz CAIK = o den Sinn habe, CAIK sey kein absolutes sondern wie es vermöge der angezogenen Stelle behauptet wird, ein relatives Nichts? Also nun die eigene Erklärung des Herrn Verfassers. (S. 93.) Die Fläche CAIK ist gegen die Fläche KIB unendlich klein, und diese gegen jene unendlich groß.

69. §.

Ausser der hier angeführten Behauptung belehret uns der H. Verf. noch kurz und gut davon, daß verschiedene Ordnungen des Unendlichkleinen möglich sind, und was dem anhängig ist: kurz hier wird der Anfänger, der die Theorie von den Parallellinien lernen soll, mit den so oft gemißbrauchten algebraischen Rechnungsregeln unterhalten, als wären das alles ganz apodictische und im vollkommensten Lichte erscheinende geometrische Grundwahrheiten. In der vorstehenden 1 Abhandlung habe ich mich über das alles umständlich erklärt: hier will ich annehmen, daß diese ganze herrliche Lehre dem Buchstaben nach wahr sey, und dieser Voraussetzung gemäß den Schlüssen des H. Schulze weiter folgen. Vermöge seiner eigenen Lehre ist CAIK unendlich groß, also so etwas, das man mit ∞ bezeichnet. Unten S. 93. heißt es jede begränzte Fläche oder ebene Figur (also jede endliche Fläche) ist gegen die unbegränzte Fläche CAIK unendlich klein: also gewiß CAIK = ∞. Diese ist wiederum gegen die Fläche KIB

unendlich klein, also KIB $= \infty^2$, oder wenigstens doch KIB $= \infty^{1+m:n}$, wenn auch m:n ein ächter Bruch wäre: anstatt dessen will ich kürzer ∞^m schreiben mit der Voraussetzung, daß $m > 1$ sey. Demnach ist die Uebersetzung unsrer Schlußfolge KIB = KIB + CAIK in die algebraische Sprache diese $\infty^m = \infty^m + \infty$. Welcher mathematische Schriftsteller von Leibnitzen bis auf Eulern giebt nun dem Herrn Schulze die Erlaubniß weiter zu zuschliessen? also ist $0 = \infty$. Ich kann mich zwar hiebey auf die vorstehende 1. Abhandlung im 34 und 38 §. beziehen, will aber die dort schon angezogene Stelle aus H. Eulers Differentialrechnung Cap. III. §. 96. pag. 86. hier lieber ganz hersetzen, um dem Leser die Mühe des Nachschlagens zu ersparen.

In quantitatibus infinite magnis dantur rationes geometricae aequales, cum tamen arithmeticae sint quantumvis *inaequales*. Si enim a et b denotent quantitates finitas, hae duae quantitates infinitae $\frac{a}{dx} + b$ et $\frac{a}{dx}$ rationem habent *geometricam* aequalitatis; erit enim quotus ex earum *divisione* ortus $= 1 + \frac{bdx}{a} = 1$, ob dx $= 0$: interim tamen, si arithmetice comparentur, ob *differentiam* $= b$, ratio erit inaequalitatis. (Also soll man aus der Gleichung $\frac{a}{dx} + b = \frac{a}{dx}$ nicht die Folge ziehen $b = 0$.) Simili modo $\frac{a}{dx^2} + \frac{a}{dx}$ ad $\frac{a}{dx^2}$ rationem geometricam habet aequalitatis, exponens enim rationis est $= 1 + dx = 1$; verum tamen *differentia* est $\frac{a}{dx}$ ideoque *infinita*. (Noch vielweniger soll man also

aus

aus der Gleichung $\frac{a}{dx^2} + \frac{a}{dx} = \frac{a}{dx^2}$ die Folge $\frac{a}{dx} = o$ ziehen.)

70. §.

Man mache nun die Anwendung auf H. Schulzens Vortrag. Nach seiner eigenen Erklärung ist der Ausdruck $KIB = KIB + CAIK$ so etwas, wie $\infty^m = \infty^m + \infty$, wenn $m > 1$ ist: also folgt daraus schlechterdings nicht $\infty = o$, oder hier $CAIK = o$; eine solche Folge ziehen, das heißt wider die ersten Grundregeln der Rechnung des Unendlichen anstossen. Wie siehet es also mit dem neuen Grundsatze aus: das Ganze kann einem Theile gleich seyn, wenn sein Nebentheil gegen ihn Null ist? H. Schulze sagt selbst, daß er eine relative Null verstehe, und in diesem Sinne ist der angeführte Satz so wenig ein fester Grundsatz, daß er vielmehr grundfalsch ist. Wenn $A = B + C$, und C endlich oder unendlich groß, in Vergleichung mit B aber nach dem gemeinen Sprachgebrauch unendlich klein ist; so ist es den ersten Grundsätzen der Rechnung des Unendlichen zuwider, was H. Schulze auf der 77. S. behauptet, daß die Grösse B unverändert bleibe, man mag C zu ihr addiren oder davon subtrahiren. Es ist so wenig jedem Mathematiker bekannt, daß vielmehr Euler und mehr andre verdiente Mathematiker, die doch wohl wissen, was Rechnung des Unendlichen ist, grade das Gegentheil lehren.

Was eigentlich hätte bewiesen werden müssen, wenn das hätte das Resultat seyn sollen, was H. Schulze S. 93. eigentlich im Sinne hat, das wäre die Gleichung $\frac{CAIK}{KIB} = o$, und hievon ist Nichts in dem vermeinten Beweise zu finden. Die Anlage zu einem solchen Beweise könnte doch wohl keine andre als diese seyn. Man müs-

ste KIB als ein Parallelogramm mit zwey unendlich grossen Seiten IK, IB, und CAIK als ein Parallelogramm mit einer unendlich grossen Seite AC und einer endlichen Seite AI betrachten; das würde $CAIK = AI.\ AC.\ \sin.\ A$, und $KIB = IK.\ IB.\ \sin.\ A$, also $\frac{CAIK}{KIB} = \frac{AI}{IB}$ geben, wie es seyn müste. Aber kann man Beweise aus den Eigenschaften der Parallelogramme hernehmen, um die Theorie von den Parallellinien darauf zu bauen? wäre das nicht wiederum schon Voraussetzung dessen was erwiesen werden soll? Gesetzt man könnte auch mit dem Beweise daß $\frac{CAIK}{KIB} = o$ sey, auf andre Art fertig werden, so ergiebt sich doch aus dem Inhalte des 69. §. daß der Satz $KIB = KIB + CAIK$ dennoch grundfalsch bleiben würde. Wer Beweise von der Art, welche sich auf so erweißlich fehlsame Begriffe und Vorstellungsarten gründen, als geometrische Vorstellungsarten gelten lassen kann, auf den ruhet Euklidens Geist gewiß nicht.

71. §.

Ich zweifle im geringsten nicht, daß Herr Hofprediger Schulze durch seine eigenen Bemerkungen, wovon oben die Rede war, sich von der Fehlsamkeit seines vermeinten Princips überzeuget hätte, wenn die bisher üblich gewesene Sprache in der Lehre vom Mathematisch-Unendlichen ihn nicht verleitet hätte, sich über die sehr gegründeten Zweifel, die ihm selbst beyfielen, hinweg zu setzen. Ein redendes Beyspiel von dem, was ich in meiner voranstehenden I. Abhandlung an mehrern Stellen gesagt habe, daß der gemeine Vortrag in der Lehre von Unendlichen äusserst nachtheilige Folgen habe. Was hilft das alles, wenn man zu seiner Entschuldigung anführt, daß er richtig erklärt werden könne, wenn er von so wenigen richtig erklärt wird, und wenn vermöge der Erfahrung so äusserst fehlsame Anwendungen davon gemacht werden,

daß es alle Erwartung übersteigt. Eben derselbe Schriftsteller, der auf allen Seiten von Evidenz, von intuitiver Erkenntniß in der Geometrie redet, der vom Geometer fodert, daß er von jedem seiner Begriffe nicht nur die Möglichkeit überhaupt, sondern sogar die Art derselben aufs schärfste beweisen soll, nach dessen Versicherung selbst bey den Gegenständen der Mathematik die Evidenz sogleich verschwindet, sobald man sie ohne Construction blos discursiv nach blossen allgemeinen Begriffen behandelt; eben dieser Schriftsteller versichert, durch Anwendung der Begriffe des Unendlichgrossen und Unendlichkleinen beym Vortrage der allerersten Gründe der Geometrie leide die Strenge und Evidenz der Beweise so wenig, daß vielmehr der Begriff des Unendlichen eben dadurch sogleich dem Anfänger ganz anschaulich gemacht werde. Noch eben dieses Schriftstellers Versicherung wird eben dadurch die Vorstellung, wie eine wirkliche bestimmte Grösse gegen eine andre ein wahres relatives Nichts seyn könne, so daß letztere weder durch Addition noch Subtraction der erstern verändert wird, (wenn gleich Euler und andre verdiente Schriftsteller grade das Gegentheil lehren) ganz evident und ganz apodictisch im vollkommensten Licht dargestellet. Noch mehr, der Begriff des Unendlichgrossen und Kleinen wird in einem noch weit höhern Grade anschaulich, wenn der Anfänger mit der grösten Evidenz einsehen lernt, wie eine Grösse, die gegen eine andre unendlich klein, oder ein wahres Nichts ist, dennoch gegen eine dritte unendlich groß seyn könne, und wie es daher unzählig viele Grade oder Ordnungen des unendlich Grossen und Kleinen geben könne. Die Evidenz der Geometrie, welche bisher in einem so grossen Ruf gestanden hat, besteht also nun nicht mehr darin, daß sie mit den bekanntesten Begriffen des gemeinen Lebens anfängt, die man sonst auch notiones communes nannte: künftig wird sie darin bestehen, daß man mit Begriffen anfängt, die wider allen gesunden Menschenverstand sind. Herrliche Früchte

davon,

davon, daß man die algebraische Sprache, die nichts anders, als Zeichen- und Rechnungssprache, und noch dazu nach Leibnitzens eigenem Zeugnisse nicht einmahl richtige Sprache, sondern nur toleranter vera ist, so übersetzt, und in die Lehrbücher der Elementargeometrie gebracht hat, als wenn das alles eine sehr genau richtige geometrische Sprache wäre.

72. §.

Damit es nicht scheine, als ob ich eine Stelle (91. 92. S.) übersehen hätte, oder mit Vorbedacht gar nicht hätte berühren wollen; wodurch nach H. Schulze nicht allein sein erster und dritter Lehrsatz, sondern auch dasjenige, was er in der Anmerkung zur ersten Beweisart, die Einschränkung des 9. Grundsatzes beym Euklides betreffend, beygebracht hat, seine völlige Aufklärung erhalten soll; will ich sie lieber ganz hersetzen. Sie soll die Wahrheit des Satzes, daß die Fläche CAIK, ob sie gleich an sich selbst betrachtet von unendlicher Grösse ist, in Vergleichung mit der Fläche des Winkels KIB ein wahres Nichts sey, auch auf eine andre Art, als im 7. Lehrsatz (hier §. 67.) ganz evident zeigen. 25. Fig.

„Man setze z. B. die grade Linie MB gehe nach beyden Seiten ohne Ende fort, und nehme in derselben einen beliebigen Punct I an; so ist offenbar die ohne Ende fortgehende Linie IB eben so groß, als die nach der andern Seite ohne Ende fortgehende Linie IM: denn wenn man die eine auf die andre legt, so decken sie einander ohne Ende, folglich ist $IB = \frac{1}{2}MB$.„

Mir ist von dem allen gar nichts sondern vielmehr das Gegentheil offenbar. Wenn mir offenbar seyn soll, daß eine Linie die andre decke, so muß ich nicht allein beyde Anfangspuncte auf einander legen können, sondern auch wissen, wo ich die Endpuncte suchen soll, damit ich entweder mit Augen sehen kann, daß sie auf einander fallen, wenn die Linien selbst an einander liegen, oder damit ich mich durch Schlüsse überzeugen kann, daß es der Erfolg

seyn müsse. Weil aber IB und IM keinen Endpunct haben, so können hier auch keine Endpuncte auf einander fallen. Nach meinen Begriffen also, die ich in der vorstehenden Abhandlung umständlicher vorgetragen habe, ist IB weder eben so groß noch grösser noch kleiner als IM. Unbegränzte, oder wenn man will unendliche, Grössen lassen sich gar nicht mit einander vergleichen: diesemnach hat der Schlußsatz, „folglich $IB = \frac{1}{2}MB$„ gar keinen mathematischen Sinn, MB hat sogar weder Anfangs- noch Endpunct.

„Allein aus eben dem Grunde folgt, (so fährt H. Schulze fort 92. S.) daß auch $AB = AM$ ist: denn wenn man AB auf AM legt, so decken sie einander gleichfalls ohne Ende fort, folglich ist auch $AB = \frac{1}{2}MB$. Mithin ist $IB = AB$. (Der Schluß gilt wegen der angeführten Gründe nicht: aber

wenn er auch gültig wäre, so hätten wir doch in dem gleich folgenden einen neuen Fehlschluß.) Da nun $AB = IB + AI$ ist; so ist $IB = IB + AI$, also $AI = 0$, d. h. AI ist gegen den ohne Ende fortgehenden Schenkel IB ein wahres Nichts.„

Was im 69. und 70. §. gegen diese Art zu schliessen ist erinnert worden, das trift hier die letzte Schlußfolge ebenfalls. Die versprochene völlige Aufklärung ist hier also keinesweges zu finden. Uebrigens fällt der Beweis des 8 Lehrsatzes mit dem 7ten Lehrsatze und dessen Beweise von selbst weg: also leistet mir wenigstens die zweyte Beweisart so wenig als die erste ein Genüge.

73. §.

Dritte Beweisart.

Bey dieser werde ich kürzer seyn können, als bey den vorigen beyden, weil alles dazu vorbereitet ist. Aus dem 7ten Lehrsatze der 2ten Beweisart, (hier im 67. §.) welcher mit zur Reihe der Lehrsätze der dritten Beweisart gehört, wird hier der Beweis des 8ten Lehrsatzes gefolgert:

dem-

demnach muß dieser 8te Lehrsatz schon von selbst wegfallen, wenn der Beweis des 7ten fehlerhaft ist. Weil indessen vielleicht nicht jeder Leser dieser Abhandlung die Schrift des H. Schulze sogleich bey der Hand hat, will ich der Vollständigkeit wegen den Lehrsatz mit seinem Beweise hersetzen.

8. Lehrsatz.

Wenn man durch die Schenkel FG, FB eines Win- 26. Fig.
kels GFB eine beliebige grade Linie DC ziehet; so ist das Dreyeck FDC gegen die Fläche des Winkels GFB ein völliges Nichts, und daher die unbegränzte Fläche CDGB, die zwischen CD, DG, und CB ohne Ende fort enthalten ist, eben so groß, als die Fläche des Winkels GFB.

Beweis. Denn man mache den Winkel GDI = GFB, so ist die unbegränzte Fläche FDIB gegen die Fläche des Winkels GDI ein völliges Nichts. (7 Lehrs. der 2 Beweisart, hier im 67. §. Weil die Falschheit dieses Lehrsatzes einleuchtend genug bewiesen ist, so fällt alles übrige von selbst weg.) Da nun das Dreyeck FDC bloß ein Theil der Fläche FDIB ist; so ist um so mehr das Dreyeck FDC gegen die Fläche des Winkels GDI ein Nichts, folglich auch gegen die Fläche des Winkels GFB (1. Lehrs.) Nun ist die unbegränzte Fläche CDGB so groß, als die Fläche des Winkels GFB weniger dem Dreyecke FDC. Also ist die unbegränzte Fläche CDGB eben so groß, als die Fläche des Winkels GFB. (Auch diese Folge wäre falsch, wenn gleich das vorhergehende seine Richtigkeit hätte.)

Alle im 68 und den folgenden §. §. vorgetragenen Erinnerungen treffen auch diesen vermeinten Beweis: also ist es unnöthig, daß ich mich länger dabey aufhalte. Wenn eine endliche Grösse in algebraischen Formuln als Factor eines Products vorkommt, wo- von der andre Factor Null ist, wie $\frac{1}{\infty}$, $\frac{1}{\infty^2}$, u. s. w.

(das sind alles absolute Nullen, von relativen Nullen weiß der Algebraist nichts, wenn er anders ein philosophischer und kein bloß empirischer Rechner ist) so verstehet sich von selbst, daß ein solches Product nach bekannten selbst elementarischen Rechnungsregeln Null sey, und aus der Rechnung wegfalle: aus geometrischen Figuren aber läßt sich ein solches Dreyeck wie FDC nicht wegdemonstriren. Wenn man gleich nach den Regeln der so genannten Rechnung des Unendlichen in gewissen Fällen $\infty + b = \infty$ setzen, oder vielmehr nur b weglassen kann; so gilt das doch nur, wenn man wissen will, was $\frac{\infty + b}{\infty}$ sey. Hier fällt b weg, weil $\frac{b}{\infty}$ eine absolute Null ist, aber aus $\infty + b = \infty$ folgt keinesweges $b = o$, es folgt nichts anders als $\infty + b - \infty = b$.

74. §.

Wenn man sich erlauben will, beym Vortrage der ersten Grundlehren der Geometrie die Sprache der Rechnung des Unendlichen zu reden, und Vorstellungsarten, die nichts anders als Abkürzungen algebraischer Rechnungen sind, als anschaulich einleuchtende geometrische Grundbegriffe gelten zu lassen; so kann man leicht fertig werden. Ich will Herrn Schulze zur Schadloßhaltung wegen der drey Beweisarten, die selbst nach den Grundsätzen der Rechnung des Unendlichen falsch sind, sechs andre wieder geben, die alle den Grundsätzen der Rechnung des Unendlichen ganz gemäß, und insofern richtig sind, wenn ich gleich keinem einzigen davon den Rang eines geometrischen Beweises zugestehe. Wenn es der Mühe verlohnte, so wäre es vielleicht nicht schwer, ein ganzes Dutzend zu erfinden. Zur Probe will ich doch mein halbes Dutzend hersetzen, damit nicht wieder andre Schriftsteller, und mit ihnen die Herrn Recensenten zum Theil verleitet werden, so etwas für neue Erfindung zu halten. Die sehr allgemein eingerissene Neigung, was neues zu sagen,

und

und was neues anzukündigen, hat für andre Wissenschaften schon sehr nachtheilige Folgen gehabt, und ich fange an, zu fürchten, daß der Mathematik wohl gar eben das Schicksal bevorstehe: manche Erscheinungen über dem mathematischen Horizont versprechen der Wissenschaft nicht sehr glänzende Aussichten auf die Zukunft.

75. §.

Erste Beweisart.

Grundsatz.

Wenn durch A und C die graden Linien AE, CD parallel gezogen werden, so schneiden sie einander in einem unendlich weit entfernten Punct. 27. Fig.

Zusatz. Also entstehet aus AC, AE, CD ein gradlinichtes Dreyeck, dessen Spitze von AC unendlich weit entfernt ist.

Lehrsatz.

Wenn der Winkel FAB > FCD ist, so wird CD von AB geschnitten.

Beweis. Man mache FAE = FCD, so ist AE parallel mit CD, also wird ACDE ein Dreyeck, dessen Seiten AE, CD, sich im unendlich weit entfernten Puncten schneiden, und AB liegt innerhalb der Gränzen dieses Dreyeckes: also wird CD von AB geschnitten. (17. §. n. 2.)

Zweyte Beweisart.

Wenn wie vorhin FAB > FCD ist, so wird CD von AB geschnitten.

Beweis. Man ziehe CG mit AB parallel, so schneiden AB, CG, einander in einem unendlich weit entfernten Punct. Weil nun AB an der einen Seite, CG aber an der andern Seite von CD liegt, und der Durchschnittspunct dieser beyden graden Linien an der Seite von CD zu finden seyn muß, wo CG liegt; so erhellet aus dem 17. §. n. 1, daß auch CD von AB geschnitten werde.

Dritte Beweisart.

Grundsatz.

28. Fig. Von einem Punct A nach einem andern B kann nur eine und eben dieselbe grade Linie laufen.

Zusatz. Also auch alsdenn nur, wenn B von A unendlich weit entfernt ist.

Lehrsatz.

Durch einerley Punct A können nicht zwey verschiedene grade Linien AB, AC, mit einer dritten parallel laufen.

Beweis. Es sey E von D unendlich weit entfernt, so laufen AB, AC beyde durch E, wenn sie beyde mit DE parallel sind: also fallen sie in einerley graden Linie zusammen. (vor. Satz. Zus.)

Daß aus diesem Satz ein richtiger Beweis von Euklids XI Grundsatze folgen würde, ist bekannt.

Vierte Beweisart.

29. Fig. Wenn zwo grade Linien CD, CF, einander schneiden, und selbst von einer dritten in D, F, geschnitten werden, so können sie diese nicht unter gleichen übereinstimmig liegenden Winkeln schneiden, weil allemahl AFC > ADC ist. (Euklids 16 Satz.)

Zusatz. Also können CD, EF, die dritte AB auch nicht unter solchen Winkeln schneiden, wovon jeder = o ist.

Lehrsatz.

14. Fig. Wenn AB, CD, parallel sind, und von EF in G und H geschnitten werden, so ist EGB = EHD.

Beweis. Wenn EGB nicht = EHD ist, so mache man EGL = EHD. Alsdenn ist GL sowohl als GB mit CD parallel, mithin schneiden beyde die grade Linie unter solchen Winkeln, wovon jeder = o ist, gegen den Zusatz des vor. Lehrsatzes.

Zusatz. Wenn also AB, CD parallel sind, so ist auch AGF = EHD, und EHD + BGF = 2R

Hier-

Hieraus beweiset man mit Euklides, daß alle Winkel im Dreyecke zwey rechte Winkel ausmachen, und kann ferner den XI Grundsatz so beweisen, wie oben im 31. §.

Fünfte Beweisart.

Wenn CD, EF, verlängert mit AB unter gleichen Winkeln zusammen laufen, so sind CD, EF, parallel. (Euklids 28 Satz.) 30. Fig.

Zusatz. Also ist auch CD mit EF parallel, wenn AB von beyden unter einem Winkel = o geschnitten wird.

Lehrsatz.

Zwey grade Linien CD, EF, die beyde mit einer dritten AB parallel laufen, sind unter sich parallel.

Beweis. Denn CD und EF schneiden nun beyde die dritte AB unter einem Winkel = o, also ist CD mit EF parallel. (vor. Satz, Zusatz.)

Das übrige wie im leipziger Magazin, 2tes Stück.

Sechste Beweisart.

1. Lehrsatz.

Zwey Parallellinien AB, CD, ins unendliche nach beyden Seiten verlängert, begränzen eine ebene zweyseitige Figur von allen Seiten. 31. Fig.

Beweis. Denn sie stossen auf beyden Seiten im unendlich weit entfernten Punct zusammen.

Anmerkung.

Zwey endliche Parallellinien können das freylich nicht: (Euklids 12. Grundsatz) wohl aber zwey unendlichgrosse. Das endliche Ganze kann ja auch seinem Theile nicht gleich seyn, wohl aber, wenn es unendlich groß ist.

2. Lehrsatz.

Eine grade linie EF, die eine von zweyen Parallellinien AB schneidet, muß verlängert auch die andre CD schneiden.

Beweis. Weil EF durch einen Punct F innerhalb der Gränzen der gradlinichten zweyseitigen Figur läuft; so muß die Peripherie der letztern zweymahl von FF geschnitten werden. Aber ein Durchschnittspunct G liegt schon in AE, also kann AB von EF nicht nochmahl geschnitten werden: folglich muß der zweyte Durchschnittspunct in CD liegen.

76. §.

Herr Schulze hat seiner Theorie der parallelen Linien im zweyten Abschnitt eine Theorie der parallelen Ebenen beygefüget, welche mit jener auf völlig ähnlichen Gründen beruhet. Wer jene kennet, der weiß schon von selbst, was er von dieser zu erwarten habe. Euklides und andre neuere Schriftsteller haben es nicht nöthig gefunden, eine eigene von jener Theorie der parallelen Linien unabhängige Theorie von parallelen Ebenen aufzuführen, weil sich diese aus jener sehr leicht und ungezwungen herleiten lässet: allein um die Geometrie künftig recht anschaulich evident zu machen, welches Euklides bey weiten noch nicht geleistet hat, muß von nun an auch die körperliche Geometrie mit der Betrachtung unbegränzter oder unendlich grosser körperlicher Räume anfangen, die gegen andre doch wiederum wahre Nullen sind. Je mehr sich der gesunde Menschenverstand gegen das alles empöret, desto anschaulicher ist die Evidenz. Wie äusserst mangelhaft Euklids Geometrie sey, ist daraus leicht abzunehmen, weil man aus seinen Grundsätzen nicht einmahl den nachstehenden apodictisch gewissen Satz (144. S. der Schulzischen Theorie) beweisen kann.

Man stelle sich das Weltgebäude so unermeßlich vor, als man wolle: ist es aber von allen Seiten begränzt; so ist sein ganzer Raum gegen das feinste Haarchen, das man sich nach der einen Seite ohne Ende fortgehend denkt, dennoch ein völliges Nichts.

III.

Ueber eine Stelle

in des

Herrn Lamberts Briefwechsel,

von verneinten

und

unmöglichen Wurzelgrössen.

1. §.

Herr Lambert schreibt unterm 27 Nov. 1773 an den H. Geh. Rath v. Davisson in Danzig auf eine Anfrage des letztern, die unmöglichen Grössen betreffend, sehr kurz folgendes zurück.

„Uebrigens ist die Lehre verneinender Grössen noch nicht so ins Reine gebracht, daß die Ausdrücke genau mit der Sache übereinstimmen, wiewohl man überhaupt soviel einsiehet, daß $\sqrt{-1}$ keine wirkliche Grösse seyn kann. Man müßte sonst annehmen, daß es zum Exempel in einem Cirkel Chorden giebt, die grösser als der Diameter sind, oder daß in einem rechtwinklichten Triangel die Hypothenuse kleiner als der Cathetus seyn könne.„ (Lamberts Briefwechsel 4 B. 393. S.)

Mehr Erläuterung hat H. Lambert über diesen Punct, wie ich aus einem Briefe des H. Geh. R. von Davisson vom 6 April 1781 weiß, auch nach der Zeit nicht gegeben, und das läßt sich leicht daraus erklären, weil Männer, welche als Erfinder das Gebiet der Mathematik immer mehr zu vergrössern suchen, bey Elementarbegriffen und Elementarsätzen sich nicht gern lange aufhalten. Nur Schade daß dergleichen Stellen einen Leser, der selbst noch nicht geübt genug ist, und sich aus den Schriften verdienter Männer zu unterrichten sucht, oft irre führen.

2. §.

Die Begriffe davon, was man bejahte und verneinte, oder positive und negative Grössen nennt, sind nach und nach, wie die meisten wissenschaftlichen Begriffe besonders in der Mathematik, durch Abstraction entstanden. Als man angefangen hatte, einzusehen, daß es bey Zahlen-Rechnungen oft bequem sey, die gegebenen mit Zif-

Ziffern geschriebenen Zahlen unter sich, vielleicht auch mit dem willkührlich gewählten Zeichen einer gesuchten Zahl, nur vermittelst der Additions- Subtractions- Multiplications- und Divisions-Zeichen zu verbinden, ohne die dadurch angezeigten Rechnungen selbst vorzunehmen; veranlaßte das die Nothwendigkeit, mit Summen und Differenzen, die man nicht auf gewöhnliche Art gesucht, sondern nur durch die zwischen den gegebenen Zahlen gesetzten Zeichen + und (—) angezeiget hatte, von neuen Rechnungen vorzunehmen. Ausdrücke wie $12+6+(7-4)$, $(12+6)-(7-4)$, auch eben so $(12+6)\times(7-4)$, $\frac{12+6}{7-4}$, liessen sich verkürzen, und es war sehr leicht die Richtigkeit der nachstehenden Rechnungen zu übersehen.

zu 12+6	Von 12+6
add. 7—4	subtr. 7—4
giebt 19+2	giebt 5+10

Denn 7 von 12+6 läßt 5+6, und weil die 4 nicht mit subtrahirt werden sollte, so muste man sie wieder addiren. Eben so leicht fand man, daß folgende Rechnungen richtig seyn müsten

zu 12—6	Von 12—6
add. 7—4	subtr. 7—4
giebt 19—10	giebt 5—2

denn (12—6)—(7—4) ist soviel als 12—6+4—7.

Nun war auch der Uebergang zur Multiplication und Division sehr leicht. Es ergab sich von selbst, daß $(12+6)(7-4)=(12+6)7-(12+6)4$ seyn müsse, also die Rechnung so geführt werden könne:

12+6
mult. 7—4
Prod. = 12×7+6×7—12×4—6×4.

Ende

Endlich war auch $(12+6):(7-4)=(12+6):7-(12+5):4$, also der

Quot. $=12:7+6:7-12:4-6:4$.

3. §.

Ein Ausdruck wie $12-18$ konnte zwar zuerst befremden: weil aber doch $20+12-18=14$ war, so bemerkte man leicht, daß eben das Resultat auch nach ähnlichen Regeln, wie die im 2. §. in Anwendung gebrachten, gefunden werden könne, wenn man wie folget rechnete:

$$\begin{array}{r} 15+5 \\ \text{add. } 12-18 \\ \hline 27-13 \end{array}$$

oder auf die nachstehende Art

$$\begin{array}{r} 15+5 \\ \text{add. } 0-6 \\ \hline 15-1 \end{array}$$

So entstand die Idee, man könne Zahlen, wie $12-18$ auch so schreiben $0-6$, und dergleichen Zahlen während der Rechnung so ansehen, als wären sie kleiner als Nichts, oder Zahlen unter Null. Man begriff natürlicher Weise von selbst, daß eine Zahl, die im eigentlichen Sinne kleiner als Nichts seyn sollte, ein Unding sey, und eben darum sollte die ganze Sache auch für nichts weiter als für einen Rechnungsvortheil gelten. Der Nahme hatte seine Beziehung auf das Zeichen, nicht auf die Sache selbst. Auch

$$\begin{array}{r} \text{von } 15+5 \\ \text{subtr. } 12-18 \\ \hline \text{läßt } 3+23 \end{array}$$

Denn $18-18$ subtrahiren, hieß soviel als 0 subtrahiren, also $15+5$ unverändert behalten. Nun aber war

6 zu-

6 zuviel subtrahirt, die man wieder addiren muste, da dann $26 = 3 + 23$ kommen. Man konnte also auch so rechnen:

von $15 + 5$
subtr $0 - 6$

giebt $15 + 11$.

4. §.

Das alles leitete auf die nachstehenden allgemeinen Bemerkungen.

1. Zahlen mit einerley Zeichen vermehren einander bey der Addition: aber die mit + bezeichneten werden durch die mit (—) bezeichneten vermindert, auch eben so umgekehrt diese durch jene.

2. Zahlen mit einerley Zeichen vermindern einander bey der Subtraction. Nur wenn der Subtrahendus grösser ist, als die Zahl wovon man subtrahiren soll, muß diese von jenem subtrahirt, und dem Rest das entgegen gesetzte Zeichen vorangesetzt werden. Denn + 18 von + 12 subtrahirt giebt $0 - 6$.

3. Eine Zahl wie — 6 mit + 3 multipliciren heißt — 6 dreymahl zu sich selbst addiren, also ist $-6 \times +3 = -18$; mithin auch $+3 \times -6 = -18$, weil zwey Zahlen mit veränderter Ordnung einerley Product geben. Daß letzte ließ sich auch so übersehen. Weil $+3 \times (+6 - 6) = 0$ seyn muß, so wird erfodert, daß $+3 \times -6 = -3 \times 6$ sey, damit $+3 \times +6$ dazu addirt die Summe Null gebe.

4. Zwey mit — bezeichnete Zahlen müssen ein mit + bezeichnetes Product geben. Denn $-3 \times (+6 - 6)$ muß $= 0$ seyn, und $-3 \times +6$ giebt -3×6, also muß $-3 \times -6 = +3 \times 6$ werden, damit beyde Theile einander aufheben.

5. Divisor und Quotient ineinander multiplicirt müssen das Dividendum herstellen: also ist $\frac{+18}{+3} = +6$, $\frac{-18}{+3} = -6$, $\frac{+18}{-3} = -6$, $\frac{-18}{-3} = +6$.

Die Art, wie sich die ältern Algebraisten über die eigentliche Natur der mit (—) bezeichneten Zahlen erklären, ist freylich nicht so völlig einleuchtend, als wir es jetzt von einem Schriftsteller verlangen, der die Gründe einer mathematischen Wissenschaft erklären will: allein wir müssen auch bedenken, daß wir jetzt auf den Schultern der ersten Erfinder stehen, also nun leicht weiter als sie sehen können. Die Vortheile einer solchen Bezeichungsart, und der darauf gegründeten Rechnungsregeln leuchteten immer mehr ein, nachdem man angefangen hatte, anstatt der Ziffern die Buchstaben als allgemeinere Zeichen bey Zahlenrechnungen einzuführen, bald nachher aber eben so allgemeine algebraische Rechnungsmethoden auch auf die Geometrie anzuwenden. Schriftsteller welche diese Anwendungen machten, fingen auch bald an, jene Rechnungsregeln auf noch allgemeinere Gründe zurück zu führen: es kam also nur darauf an, diese Gründe gehörig zu ordnen, so ward die Theorie davon so lichtvoll und zusammenhängend, als jede andre mathematische Theorie. Ich werde sie zuerst in einem richtigen Zusammenhange kurz darstellen, und hiernächst einige Nachrichten von den vornehmsten Schriftstellern davon folgen lassen.

5. §.

Es giebt Begriffe, die einander so entgegen gesetzt sind, daß man von der Setzung des einen auf die Verneinung des andern, und umgekehrt, schliessen kann, und dieses entweder schlechthin, oder in Beziehung auf einen gewissen Hauptbegriff, unter der Bedingung, daß von

diesem Hauptbegriffe die Rede sey: daher kommt es, daß wir selbst in der Sprache des gemeinen Lebens oft den einen von beyden durch Verneinung des andern ausdrücken. Dieses gehet soweit, daß wir oft eine Verneinung, die schon in einem Worte liegt, durch eine neue hinzugesetzte Verneinung wieder aufheben, wie wenn wir sagen: der Mann ist nicht ungelehrt, diese Dinge sind einander nicht unähnlich. Mit den mathematischen Begriffen, wenn wir vornemlich auf das aufmerksam sind, was bey einer Sache einer Ausmessung fähig ist, hat es oft eine ähnliche Bewandniß. Unter der Bedingung, daß der Stand des Queckſilbers im Thermometer sich geändert habe, ist es entweder gestiegen oder gefallen; und zum voraus gesetzt, daß die höchste Fläche des Queckſilbers, auf einer nach reaumürscher Art eingetheilten Scale, nicht auf o stehe, muß sie entweder über o oder unter o stehen. Wenn es demnach darauf ankommt, daß man von zweyen solchen unter einem gemeinschaftlichen Hauptbegriff einander entgegen gesetzten Grössen die eine anzeigen soll; so kann das auf eine gedoppelte Art geschehen. Man kann sie einmahl grade zu durch die Worte ánzeigen, welche diese Grösse gewöhnlichermassen bezeichnen, oder anstatt dessen durch die Verneinung der ihr entgegen gesetzten Grösse. Es ist gleich viel, ob man sagt: das Queckſilber im Thermometer sey von der o an gerechnet 3 Grade herunter gefallen, oder ob man sich so ausdrücken will: es habe sich um 3 Grade aber nicht aufwärts von der o entfernt. Demnach ist nur der Ausdruck verneinend, und es wird in der That durch die Verneinung der einen von beyden die ihr entgegen gesetzte eben so bestimmt angezeiget, als wenn man sie grade zu ohne Verneinung ausdrückt.

6. §.

Diejenige von zweyen einander entgegen gesetzten Grössen, welche man durch Verneinung der ihr entgegen gesetz=

gesetzten anzeiget, heißt eine negative Grösse: man sollte richtiger sagen, eine negativ ausgedrückte Grösse. Die ihr entgegen gesetzte, wird grade zu ohne Verneinung ausgedrückt, und man nennt sie eine positive Grösse, ob man sie gleich richtiger eine positiv ausgedrückte Grösse nennen müste. Das Negative gehet also keinesweges der Grösse selbst, sondern blos den Ausdruck an, der die Grösse bezeichnet. Hat man von A nach B eine grade Linie vorwärts gezogen, so kann man eben diese Linie auch rückwärts von A nach C verlängern. Soll man nun auf dieser Linie von A an gerechnet ein Stück, das z. E. drey Fuße lang ist, abschneiden, so kann dieses auf eine doppelte Art geschehen, sowohl vorwärts als rückwärts. Gesetzt man verlanget, es sollen von A an gerechnet rückwärts drey Fuß abgeschnitten werden, so kann man eben dasselbe auch so ausdrücken: schneide von A an gerechnet 3 Fuß ab, aber nicht vorwärts. Es werden diese nicht vorwärts abgeschnittene 3 Fuße das Stück AE ausmachen, und das heißt in algebraischer Sprache: es sey AE = — 3 Fuß. Nun ist zwar AD eben soviel als AE, in Absicht der Grösse, aber nicht in Absicht der Lage oder Richtung; denn es ist AD der Linie AE der Richtung nach entgegen gesetzt. Wird also AE verneinend ausgedrückt, so muß man AD ohne Verneinung oder positiv ausdrücken, und das heißt in algebraischer Sprache, es sey AD = + 3 Fuß. Die Sonne ist sowohl in den Tagesstunden als auch in den Stunden der Nacht vom Horizont entfernt, diese ihre Entfernung vom Horizont heißt in den Tagesstunden Höhe über, und in den Stunden der Nacht Tiefe unter dem Horizont. Die Grösse dieser Entfernung vom Horizont wird in Graden eines Verticalkreises angegeben, der sich vom Horizont sowohl aufwärts bis ans Zenith als auch unterwärts bis ans Nadir erstreckt. Wenn nun in der Nacht die Sonne vielleicht 30 Grade unter dem Horizont befindlich, und eine eben so grosse

1. Fig.

Höhe über dem Horizont kurz mit + 30 Grade bezeichnet ist, so drückt das Zeichen — 30 Grade eine eben so grosse Tiefe unter dem Horizont aus. In diesem Sinne ist Tiefe so viel als negative Höhe.

7. §.

Die Begriffe von Zeit und Raum haben überhaupt sehr viel ähnliches mit einander, und die Aehnlichkeit wird noch grösser, wenn wir den Begriff, welchen wir uns von der ganz einfachen Ausdehnung einer graden Linie nach der Länge machen, mit dem Begriff von der Zeit vergleichen. Wir reden ja so gar von Länge der Zeit, wir messen Länge der Zeit, die zwischen zweyen Begebenheiten verflossen ist, und Länge der Entfernung von einem Ort zum andern, auf eine vollkommen ähnliche Art. Wir reden von Zeitpuncten womit sich ein Zeitlauf anfängt und endiget eben so wie von Puncten, womit sich eine grade Linie anfängt und endiget. Sollen wir eine grade Linie messen, so muß ein Punct bekannt seyn, wo die Messung anfangen, ein andrer, wo sie sich endigen soll. Einen Zeitlauf können wir ebenfalls nur messen, wenn uns Zeitpuncte bekannt sind, womit er sich anfängt und endiget. Der Anfang eines Zeitlaufes heißt nach dem Sprachgebrauch der Chronologen Epoche, und bey der historischen Zeitrechnung muß das Jahr, dessen Anfang als Epoche angenommen wird durch eine merkwürdige in demselben vorgefallene Begebenheit kenntlich gemacht werden. Wir zählen unsre Jahre von dem Anfange des Jahres der Geburt Christi, die alten Römer zählten vom Anfange des Jahres der Erbauung ihrer Stadt.

8. §.

Eine Begebenheit kann vor oder nach der Epoche vorgefallen seyn: also ist es nicht genug die Zahl der Jahre des Zeitlaufes zwischen der Epoche und der vorgefallenen

Beges

Begebenheit zu wissen. Die Nothwendigkeit dessen, daß man auch wissen muß, ob sie vor oder nach der Epoche vorgefallen sey, leuchtet sogleich ein, wenn man den zwischen zweyen Begebenheiten verflossenen Zeitlauf wissen will, wovon keine in das Epochenjahr fällt. Sobald man weiß, daß Rom 728 Jahr vor Christi Geburt erbauet sey, jetzt aber 1785 Jahre nach Christi Geburt verflossen sind; sobald weiß man, daß die Zahl der seit Erbauung der Stadt Rom bis jetzt verflossenen Jahre die arithmetische Summe jener beyden Zeitläufe sey. Wäre Rom 728 Jahre nach Christi Geburt erbauet, so wäre der seit Erbauung der Stadt Rom bis jetzt verflossene Zeitlauf die arithmetische Differenz jener beyden Zeitläufe. Was das Epochenjahr bey Ausmessung der Zeitläufe zwischen zweyen vorgefallenen Begebenheiten in der Zeitrechnung ist, das ist bey Ausmes- 27. Fig.
sung der Entfernungen zweyer Puncte B, C, auf einer und eben derselben graden Linie ein bekannter gemeinschaftlicher Gränzpunct A. Man kann die Stelle eines jeden andern Puncts auf der graden Linie angeben, wenn man seine Entfernung vom bekannten Anfangspunct A weiß, und überdem an welcher Seite des Anfangspuncts diese Entfernung genommen werden müsse, weil die grade Linie sich vom Anfangspunct aus nach entgegen gesetzten Richtungen erstreckt. Will man nun die Entfernung zweyer Puncte B, C, von einander wissen, wovon keiner mit dem Anfangspunct einerley ist; so erhellet, daß $BC = BA + AC$ sey, wenn A zwischen beyden liegt, aber $BC = BA - AC$, wenn A nicht zwischen B und C liegt. 28. Fig.

9. §.

Wenn eine Begebenheit vor der Epoche vorgefallen ist, so zählt man die Jahre bis zur Epoche vorwärts, und weiter über die Epoche hinaus bis zur Begebenheit nach der Epoche. Bey dieser Art die Jahre zu zählen kann man zur allgemeinen Regel festsetzen:

Jahre nach der Epoche vorwärts gezählt vermehren; Jahre von der Epoche rückwärts gezählt vermindern den Zeitlauf zwischen der frühern und spätern Begebenheit.

Von Erbauung Roms hat man bis zur
Geburt Christi 753 Jahre
weiter bis zur Zerstörung Jerusalems 70 —

Von Erbauung Roms bis zur Zerst. Jerus. 823 Jahre
Vom Jahr der Sündfluth hat man bis zur
Geburt Christi 2525 Jahre
Von Christi Geburt rückwärts bis zur Erbauung Roms 753 —

Von der Sündfl. bis zur Erbauung Roms 1772 Jahre.

Man drücke die von der Epoche rückwärts gezählten Jahre durch Verneinung der von der Epoche vorwärts laufenden Jahre aus, bezeichne jene mit (—) diese mit +; man nenne ferner die eben darum nöthige Verminderung des Zeitlaufs von der frühern Begebenheit bis zur Epoche, weil die spätere Begebenheit ebenfalls vor der Epoche fällt, algebraische Addition; so giebt das eine allgemeine Regel, für die Berechnung des Zeitlaufs zwischen zweyen Begebenheiten

Allemahl ist dieser Zeitlauf die algebraische Summe der Zeitläufe von der frühern Begebenheit bis zur Epoche, und von dieser wiederum bis zur spätern Begebenheit.

Das letzte Exempel würde sich nach dieser Regel so schreiben lassen

zu + 2525 Jahre
add. — 753 —

Alg. Summe + 1772 Jahre.

Das Zeichen + vor der Summe zeigt noch von der Sündfluth vorwärts laufende Jahre bis zur Erbauung Roms an.

10. §.

Man hätte eben das Exempel auch so rechnen können.

Von Erb. Roms bis zur Geb. Chr. 753 Jahre
Von Chr. Geb. rückw. bis zur Sündfl. 2525 —

also von Erb. Roms rückw. bis z. Sündfl. 1772 Jahre.

oder kürzer algebraisch ausgedrückt

zu + 753 Jahre
add. — 2525 —

Alg. Summe — 1772 Jahre.

Da dann das Zeichen (—) vor der Summe die von Erbauung Roms bis zur Sündfluth rückwärts gezählten Jahre ausdrückt.

Wollte man von Christi Geburt rückwärts bis zur Erbauung Roms, und noch weiter bis zur Sündfluth rückwärts zählen; so liesse sich das algebraisch so ausdrücken

zu — 753 Jahre
add. — 1772 —

Alg. Summe — 2525 Jahre.

Weil jedes Jahr, welches sich durch eine bekannte Begebenheit auszeichnet, als ein Epochenjahr angenommen werden kann, so ist ungemein leicht zu übersehen, daß man alle bey solchen Fragen vorkommende Fälle unter der nachstehenden allgemeinen Aufgabe enthalten sind.

Ein Epochenjahr ist gegeben, und die Zeitläufe zwischen diesen und zweyen andern Jahren: man soll von diesen letztern beyden Jahren das eine für ein neues Epochenjahr annehmen, und den Zeitlauf bis zum andern angeben, so daß man auch weiß, ob eben dieses Jahr nach oder vor der neuen Epoche fällt.

Jeder Anfänger in der gemeinen Rechenkunst wird auf jede unter dieser allgemeinen Aufgabe enthaltene Frage leicht die richtige Antwort finden: nur wird er sie etwas umständlicher suchen, als der Algebraist, welcher sich an den Gebrauch der Zeichen + und (—) gewöhnt hat, weil diese ihm den Gebrauch vieler weitläuftigen Worte ersparen.

11. §.

Was die Epochen in der Zeitrechnung sind, das
27. Fig. sind auf einer graden Linie gegebene Puncte, wie B, A, C. Was bey der Zeitrechnung vorwärts und rückwärts zählen ist, das ist bey der graden Linie nach der einen, oder nach der andern entgegen gesetzten Richtung zählen, von B nach C oder zurück von C nach B. Was beym Zeitlauf Jahre, Monathe, Tage sind, das sind hier Meilen, Ruthen, Fusse. Will man von B nach C gezählte Maasse mit + bezeichnen, so muß man den von C nach B gezählten das Zeichen (—) voransetzen. Demnach übersiehet man mit einem Blick, was die nachstehenden algebraischen Additionen sagen wollen.

+ BA	— CA	+ BC	+ AC
+ AC	— AB	— CA	— CB
+ BC	— CB	+ BA	— AB

Man könnte bey Bezeichnung einer graden Linie mit zweyen Buchstaben am Anfangs- und Endpunct es vielleicht nicht ohne Nutzen zur Regel machen, daß der beym Anfangspunct gesetzte Buchstabe auch beym Schreiben allemahl zuerst gesetzt werden müsse, damit der folgende zweyte zugleich zeige, nach welcher Richtung die Entfernung vom Anfangs- bis zum Endpunct zu verstehen sey. Bey Anwendung algebraischer Rechnungen auf die Theorie von krummen Linien beobachtet man das wirklich. Wenn AC Abscisse ist, so schreibt man den Buchstab, welcher zum Anfangspunct gehört, zuerst.

12. §.

12. §.

Weil die algebraische Subtraction das Gegentheil der algebraischen Addition bleiben muß, so wie die arithmetische Subtraction das Gegentheil der arithmetischen Addition ist; so muß jedesmahl, wenn man algebraisch subtrahiren soll, die der zu subtrahirenden Grösse entgegen gesetzte addirt werden. Wir sind es bey Brüchen schon so gewohnt, daß wir uns gar nicht mehr daran stossen, wenn gleich mit $\frac{1}{3}$ multipliciren eigentlich mit 3 dividiren heißt, also umgekehrt mit $\frac{1}{3}$ dividiren nichts anders ist als mit 3 multipliciren. Die algebraische Subtraction ist eben so wie die algebraische Addition Verkürzung, wodurch man die mehrern vorkommenden Fälle auf eine allgemeine Regel bringt, die man allemahl anwenden kann, nicht anders als wenn es nur ein einziger Fall wäre.

Der Zeitlauf zwischen zweyen Begebenheiten ist die arithmetische Summe, oder die arithmetische Differenz der Zeitläufe zwischen diesen Begebenheiten und dem Epochenjahr: die Summe nemlich, wenn eine Begebenheit vor, die andre nach der Epoche fällt; die Differenz, wenn die Begebenheiten beyde vor oder beyde nach der Epoche fallen. Welche von beyden Begebenheiten früher, und welche später eingetreten sey, das zeiget das Zeichen + oder — an, wenn man es den bekannten Zeitläufen richtig voransetzet, und hiernächst algebraisch rechnet.

Einerley Resultat kann als algebraische Summe oder als algebraische Differenz gefunden werden, nachdem man die Rechnung einleitet.

\+ 753 Jahre von Erb. Roms bis Christi Geburt
add. + 70 Jahre weiter bis zur Zerst. Jerus.

\+ 823 Jahre von Erb. Roms bis zur Zerst. Jerus.

\+ 70 Jahre von Christi Geb. bis zur Zerst. Jeruf.
subtr. — 753 Jahre von Chr. Geb. rückw. bis z. Erb. Roms

\+ 823 Jahre von Erb. Roms bis z. Zerst. Jeruf.

13. §.

Man mache hievon die Anwendung auf die Berechnung der Entfernung zweyer Puncte auf einer graden Linie, wenn ihre Entfernung von einem gemeinschaftlichen Gränzpunct, auch überdem bekannt ist, ob der eine von beyden Puncten an der einen und der andre an der andern Seite des gemeinschaftlichen Gränzpuncts liegt, oder ob beyde an einer Seite des gemeinschaftlichen Gränzpuncts befindlich sind.

Die gesuchte Entfernung ist im ersten Fall die arithmetische Summe im andern Fall die arithmetische Differenz der Entfernungen vom gemeinschaftlichen Gränzpunct. Setzt man den bekannten Entfernungen die Zeichen + und — richtig voran und rechnet man alsdenn algebraisch, so ergiebt sich ausser der Grösse der gesuchten Entfernung zugleich ihre Richtung, nach welcher sie von dem neuen Anfangspunct fortläuft. Man rechnet ungemein leicht in sehr vielen ähnlichen Fällen eben so, wenn man es nur bey graden Linien erstlich einigermassen gewohnt ist. Soll man die Entfernung zweyer Sterne von einander finden, die in einerley Abweichungskreise stehen, so verlangt die Rechnung arithmetische Addition, wenn der eine Stern nördliche, der andre südliche Abweichung hat, arithmetische Subtraction aber, wenn beyde Abweichungen südlich, oder beyde nördlich sind. Man kann aber auch die Rechnung allemahl als algebraische Subtraction einleiten, wie man es gut findet, oder vielleicht gewohnt ist. Man bezeichne nordliche Abweichung mit +, südliche mit (—), und es sey

Decl. des Sterns A = + 47° 28′ 19″
Decl. des Sterns B = − 35° 16′ 20″

Die alg. Subtr. giebt + 82° 44′ 39″

und das Zeichen + weiset nach, daß A von B um 82° 44′ 39″ gegen Norden entfernt sey.

14. §.

Die ganze mathematische Erfindungskunst beschäftiget sich damit, Regeln zu geben, wie man aus einigen bekannten Grössen, und deren bekannten Verhältnissen gegen einander selbst und gegen gewisse unbekannte Grössen, die letztern finden könne. Man kann aber bekanntermassen alle Grössen, wenn blos von ihrem Verhältnisse die Rede ist, sowohl durch Zahlen als auch durch Linien ausdrücken, und die algebraischen Zeichen sind so allgemein, daß jede algebraische Formul so gut gewisse geometrische Constructionen, als arithmetische Operationen anzeiget, nachdem die Buchstaben entweder Linien oder Zahlen bedeuten. Deßwegen lassen sich zwo entgegen gesetzte Grössen allemahl durch zwo gerade Linien vorstellen, die nach entgegen gesetzten Richtungen liegen, und sobald eine mathematische Aufgabe in eine Gleichung gebracht ist, sobald läßt sie sich als eine geometrische Aufgabe ansehen, wobey es darauf ankommt, aus gegebenen graden Linien eine oder mehrere unbekannte grade Linien zu finden. Hieby ist aber der Umstand vorzüglich in Betrachtung zu ziehen, daß man in den meisten Fällen nicht blos wissen will, wie groß eine gesuchte Linie sey, sondern auch überdem, nach welcher Richtung sie von einem bekannten Anfangspunct fortlaufe. Eben derselbe Umstand kommt bey jeder andern mathematischen Aufgabe in Betrachtung. Man will entweder blos wissen, wie groß die gesuchte Grösse sey? oder man will zugleich ihre besondre Beziehung gegen andere Grössen kennen, ob sie ihnen nemlich entgegen gesetzt,

oder

oder nicht entgegen gesetzt sey? und in dem letzten Fall muß auch dieser Umstand bey den gegebenen Grössen, und ihren Verhältnissen gegen einander, in Betrachtung kommen. Wenn der Astronom die Declination eines Sterns sucht, so genügt es ihm nicht, überhaupt zu wissen, wie groß sein Abstand vom Aequator sey; er will zugleich wissen, ob er ihn auf der nördlichen oder der südlichen Halbkugel suchen müsse; ob die Declination des Sterns nördlich oder südlich sey.

15. §.

Wenn man diese Betrachtungen auf die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen anwendet, so ist leicht zu erachten, daß alles, was davon in den Anfangsgründen der Mathematik gelehret wird, näher eingeschränkt werden müsse, sobald der Unterscheid positiver und negativer Grössen in Betrachtung kommt. Vergleicht man in den Anfangsgründen zwo Grössen A und B mit einander, so will man blos wissen, wie groß die eine gegen die andere sey: in der Algebra aber will man zugleich wissen, ob A und B einander entgegen gesetzt sind oder nicht. Ueberhaupt sind ein Paar grade Linien gleich groß, wenn man sie in Ansehung ihrer Grösse für einander setzen kann. Ob nun gleich auch das der Fall seyn kann, wenn sie sich nach entgegen gesetzten Richtungen erstrecken; so darf man doch bey algebraischen Rechnungen zwey entgegen gesetzte Grössen nie einander gleich setzen, wenn sie gleich als Grössen betrachtet, ohne auf die Beziehung des Gegensatzes zu sehen, einander gleich sind. In der Algebra sind nur diejenigen graden Linien gleich die sowohl in Ansehung der Grösse, als auch in Ansehung der Lage der Richtung für einander gesetzt werden können. Drey Schritte vorwärts und drey Schritte rückwärts sind gleiche zurückgelegte Wege, wenn es nur auf die Grösse der Entfernung von der gemeinschaftlichen Gränze beyder Wege ankommt. Eine Person, die drey Schritte vorwärts gegangen ist,

befin-

befindet sich aber nicht an eben der Stelle, wo sie sich befinden würde, wenn sie drey Schritte rückwärts gegangen wäre. Diesemnach ist das Verhältniß $+3:+3$ dem Verhältnisse $+3:-3$ algebraisch ungleich und überhaupt ist ein Verhältniß entgegen gesetzter Grössen einem Verhältnisse nicht entgegen gesetzter Grössen allemahl algebraisch ungleich.

Wenn A gegen B eben so groß ist, als C gegen D, so ist das Verhältniß A:B dem Verhältnisse C:D gleich, und es sind A, B, C, D, vier Proportionalgrössen. Dieses lehren die Anfangsgründe, und in den Anfangsgründen wird nie ein anderer Begriff von der Proportion gebraucht. Die Algebra aber, welche allemal auf die specielle Beziehung des Gegensatzes oder Nichtgegensatzes zwoer Grössen gegen einander mit siehet, erfordert zur Gleichheit zwoer Verhältnisse noch mehr. Sind A und B einander entgegen gesetzt, so müssen auch C und D einander entgegen gesetzt seyn; sind aber A und B einander nicht entgegen gesetzt, so muß auch eben dieses von C und D gelten. Diesemnach ist

$$+A:+B = +C:+D,$$
$$+A:+B = -C:-D,$$
$$+A:-B = +C:-D,$$
$$+A:-B = -C:+D,$$

keinesweges aber $+A:+B = +C:-D$, wenn gleich für sich betrachtet A gegen B so groß ist, als C gegen D.

16. §.

Hiemit wird es zugleich völlig ins Licht gesetzt, was es mit einer negativen Zahl eigentlich für eine Bewandniß habe. Der Exponent eines Verhältnisses wird dadurch gefunden, daß man das vorhergehende Glied mit dem nachfolgenden dividirt. Wenn Dividendus und Divisor Grössen von einerley Art sind, welches hier allemahl der Fall ist; so ist der Quotient eine Zahl, die es angiebt,

wie

wie vielmahl der Divisor im Dividendus enthalten sey. Die Ziffer aber, welche diese Zahl ausdrückt, kann nicht zugleich mit anzeigen, ob das vorhergehende und das nachfolgende Glied des Verhältnisses, oder welches hier einerley ist, ob Dividendus und Divisor einander entgegen gesetzt sind, oder nicht: dazu hat man also ein eigenes Zeichen nöthig. Wenn in der 29 Figur AF = 1 F ist, und AG = AF genommen wird, so ist AG = — 1 F. Wenn nun auf die Lage oder Richtung der graden Linien AF, AG, nicht Rücksicht genommen wird, so sind beyde 3 Fuß lang, und die Zahl 3 ist hier weder positiv noch negativ: es ist nicht allein $\frac{AD}{AF} = 3$, sondern auch $\frac{AE}{AG} = 3$. Wenn dagegen auf die Lage oder Richtung dieser graden Linien mit Rücksicht genommen werden muß, so ist es nicht mehr einerley, ob man AE mit AG oder mit AF vergleichen will.

29. Fig.

Man muß $\frac{-AE}{+AF} = -3$ setzen, wenn $\frac{+AD}{+AF} = +3$ gesetzt ist. Das Zeichen —, welches man der Ziffer 3 voransetzet, zeiget an, es sey nicht die Einheit + AF selbst, sondern eine ihr zwar gleiche aber entgegen gesetzte 3 mahl in — AE enthalten. Wenn nun gleich AF nicht selbst für Eins angenommen ist, übrigens aber die Grösse der Linien AD, AE, dieselbige bleibt, so bleibt auch die Grösse der Zahl $\frac{AE}{AF}$ oder $\frac{AD}{AF}$ einerley, und $\frac{-AE}{+AF}$ bleibt — 3, da dann das Zeichen — ausdrückt, der Dividendus sey dem Divisor, oder das vorhergehende Glied des Verhältnisses dem nachfolgenden entgegen gesetzt.

Eben darum muß man auch $\frac{-AD}{-AF} = \frac{+AD}{+AF}$ (8. §.) $= +3$, und $\frac{+AE}{-AF} = \frac{-AE}{+AF}$ (8. §.) $= -3$ setzen.

Ver-

Vermittelst der algebraischen Auflösung einer Aufgabe findet man nie die gesuchte Grösse selbst, sondern nur ein Zeichen der gesuchten Grösse; oder vielmehr ein Zeichen, welches das Verhältniß der gesuchten Grösse gegen die als bekannt angenommene Einheit ausdrückt. Weil es hiebey fast allemahl mit auf den Umstand ankommt, ob die gesuchte Grösse der als bekannt angenommenen Einheit entgegen gesetzt sey oder nicht; so müssen die Regeln der Buchstabenrechnung zugleich zeigen, wie die Zeichen + und — der gegebenen Grössen die Zeichen der gesuchten bestimmen. Eigentlich ist das gesuchte allemahl eine algebraische positive oder negative Zahl.

17. §.

Bey algebraischen Rechnungen wird die Einheit allemahl positiv angenommen, und zwey grade linien a, b, ineinander multipliciren heißt nach dem algebraischen Sprachgebrauch zu einer für Eins angenommenen graden linie und zu beyden gegebenen die vierte geometrische Proportionallinie finden. Die bekannten Regeln der Multiplication

$$+a \times +b = +a.b,$$
$$-a \times -b = +a.b,$$
$$+a \times -b = -a.b,$$
$$-a \times +b = -a.b,$$

folgen alsdenn aus den Proportionen

$$+1 : +a = +b : +a.b,$$
$$+1 : -a = -b : +a.b,$$
$$+1 : +a = -b : -a.b,$$
$$+1 : -a = +b : -a.b.$$

In keiner dieser Proportionen darf man das Zeichen des letzten Gliedern ändern, wofern die Verhältnisse an beyden Seiten des Gleichheitszeichens einander, algebraisch gleich bleiben sollen. Aendert man aber das Zeichen der Einheit, und schreibt — 1 statt + 1; so muß man in

allen

allen vier Proportionen auch das Zeichen des letzten Gliedes ändern.

18. §.

Man setzet bey diesem Sprachgebrauch voraus, daß die algebraischen Grundoperationen, die Addition, Subtraction, Multiplication und Division, sich durch geometrische Constructionen eben so gut, als durch Zahlenrechnungen vorstellig machen lassen: vermittelst der Construction wird alsdenn allemahl beydes zugleich die Grösse und Richtung der gesuchten graden Linien gefunden. Auf dem
30. Fig. einen Schenkel CA eines willkührlich gezeichneten gradlichten Winkels ACB schneide man die beyden ersten Glieder der Proportionen ab, nemlich $CD = 1$, $CE = a$, auf dem zweyten Schenkel CB trage man das dritte Glied $CF = b$ auf, ziehe DF, und hierauf EG mit DF parallel, so ist

$$CD : CE = CF : CG,$$
$$\text{oder } 1 : a = b : CG,$$

also $CG = a.b$. Nun ist Cb in Absicht auf CB negativ,
31. Fig. so wie Ca gegen CA negativ ist. Schneidet man also CE auf Ca ab, so ist nunmehro $CE = -a$, und wenn man
32. Fig. CF auf Cb abschneidet, so wird $CF = -b$ seyn. Es ergiebt sich in allen diesen Fällen einerley CG der Grösse nach, aber nicht der Lage nach. In dem Fall welchen die 30ste Figur vorstellet, hatte man $CD = +1$, $CE = +a$, und $CF = +b$ genommen, daher fiel CG auf CB, so daß $CG = +a.b$ ward. Nimmt man nun $CD = +1$,
31. Fig. $CE = -a$, $CF = -b$ und verfährt übrigens, wie vorhin, so fällt CG noch auf CB, und es bleibt demnoch $CG = +a.b$, wie die allgemeine Proportion $+1 : -a = -b : +a.b$ verlangt. Nimmt man drittens $CD = +1$,
32. Fig. $CE = +a$, $CF = -b$ und verfährt übrigens noch wie vorhin, so bleibt nicht nur $CD : CE = CF : CG$, also $CG = a.b$, sondern es fällt nun auch CG auf Cb, so daß

nun-

nunmehro CG = — a. b wird. Eben dieses erfolgt, wenn man CD = + 1, CE = — *a*, aber CF = + *b* abschneidet, und sodann das obige Verfahren anbringt: es bleibt zwar überhaupt CD: CE = CF: CG, aber CG fällt auf *Cb*, und wird negativ, wie im vorigen Fall. Wenn man die Einheit CD nicht positiv, sondern negativ nimmt, das ist, wenn man sie nicht auf CA, sondern auf C*a* abschneidet; so wird in den ersten beyden Fällen CG auf C*b* und in den beyden letztern Fällen auf CB fallen. 33. Fig.

19. §.

Es ist indessen nicht nothwendig, daß man sich jede algebraische Multiplication als eine geometrische Operation vorstelle: denn eigentlich ist doch der eine Factor, welchen man sich als den Multiplicator vorstellet, allemahl eine Zahl. Das siehet man am deutlichsten, wenn man die grade Linie, welche man für Eins annimmt, mit einem eigenen Buchstaben bezeichnet. Man setze sie = u, so ist $u : a = b : \frac{a}{u}.b$, und $\frac{a}{u}.b$ ist ein Product der graden Linie b mit der Zahl $\frac{a}{u}$, diese mag übrigens rational oder irrational, positiv oder negativ seyn. Eine Grösse mit einer negativen Zahl multipliciren heißt nun nicht das Multiplicandum selbst, sondern die demselben entgegen gesetzte sonst gleiche Grösse sovielmahl nehmen, als im Multiplicator Eins enthalten ist. Demnach ist $\frac{-a}{+u}.b = -\frac{a}{u}.b$, und $\frac{-a}{+u}.-b = +\frac{a}{u}.b$, wie es im 17. §. aus den Proportionen folgt. Mit einer positiven Zahl multipliciren heißt vom Multiplicandus selbst

das Vielfache machen: darum ist $\frac{+a}{+u}.+b=+a.b$,

und $\frac{+a}{+u}.-b=-\frac{a}{u}.b$.

20. §.

Die Division läßt sich auf eine doppelte Art vorstellig machen. Wenn Dividendus und Divisor von einerley Art sind, so sucht man als Quotienten eine Zahl, welche angiebt, wievielmahl der Divisor im Dividendus enthalten sey. Kommt es nun auf die Zeichen + und — an, so ergeben die im 16. §. vorgetragenen Schlüsse schon, was der Quotient für ein Zeichen haben müsse. In dem Fall, wenn der Divisor eine Zahl ist, weiß man, daß der Quotient mit dem Dividendus von einerley Art seyn müsse. Nachdem nun der Divisor eine positive oder eine negative Zahl ist, nachdem soll man entweder das Dividendum selbst, oder eine Grösse, die dem Dividendus entgegen gesetzt sonst aber gleich ist, auf gewöhnliche Art dividiren. Wenn also ohne Rücksicht auf die Zeichen $\frac{a}{n}=q$ wäre, so ist $\frac{+a}{+n}=+q$, $\frac{-a}{+n}=-q$, $\frac{+a}{-n}=-q$, $\frac{-a}{-n}=+q$, wie den bekannten Regeln gemäß ist. Wenn a also auch q eine grade Linie ist, so kann auch die Zahl n als der Exponent des Verhältnisses einer graden Linie zur andern, wie $\frac{b}{u}$ betrachtet werden.

Alsdenn ist $\frac{a.u}{b}=q$, und man findet q sowohl der Grös-

se als Lage nach durch eine ganz ähnliche geometrische Construction, wie im 18 §. das Product zweyer grader Linien ineinander. Auch wenn a und b grade Linien sind, und der Quotient $\frac{a}{b} = n$ eine Zahl ist; so kann man eine grade Linie u für Eins annehmen, und durch die geometrische Construction $\frac{a}{b} u = q$ suchen, so hat man auch

$$\frac{a}{b} = \frac{q}{u} = n,$$

21. §.

Weil ein Product wie a.b, wenn a und b grade Linien sind, ebenfalls eine grade Linie vorstellet; so hat es mit Producten, die aus mehrern Factoren bestehen, wie a.b.c, a.b.c.d, wenn alle Factoren grade Linien sind, eine ähnliche Bewandniß: eigentlich sollte man schreiben $\frac{a}{u}.\frac{b}{u}.c$, $\frac{a}{u}.\frac{b}{u}.\frac{c}{u}.d$, wenn u für Eins angenommen ist. Demnach stellen auch die Potenzen a^2, a^3, a^4, und überhaupt a^n grade Linien vor: man müste eigentlich $\frac{a}{u}.a$, $\frac{a}{u}.\frac{a}{u}.a$, $\frac{a}{u}.\frac{a}{u}.\frac{a}{u}.a$, schreiben.

Wenn a.b die Fläche eines Rechteckes bezeichnet, wovon a, b, die Seitenlinien sind; und a.b.c den körperlichen Raum eines rechtwinklichten Parallelepipedi, wozu die Seitenlinien a, b, c, gehören; so wird in jenem Fall ein Quadrat Q, in diesem Fall ein Würfel C für Eins angenommen, und es ist eigentlich das Rechteck $= \frac{a}{u}.\frac{b}{u}.Q$, das Parallelepipedum $= \frac{a}{u}.\frac{b}{u}.\frac{c}{u}.C$.

Wenn also nicht vielleicht a^2 anstatt $\frac{a}{u}.\frac{a}{u}.Q$ und a^3

anstatt $\frac{a}{u} \cdot \frac{a}{u} \cdot \frac{a}{u} \cdot C$ gesetzt ist, so sind a^2, a^3, und überhaupt a^n wie andre Producte ebenfalls grade Linien. Soll das n eine ganze Zahl bezeichnen, so gehören alle diese Potenzen zu einer geometrischen Progression, die mit den beyden Gliedern 1 und a anfängt. Setzt man $a^n = A$, so ist $a = \sqrt[n]{A}$ die erste von $n - 1$ mittlern geometrischen Proportionallinien zwischen 1 und A, und diese läßt sich ihrer Grösse nach allemahl angeben, wenn nicht allein die Grösse der graden Linie A sondern auch die Grösse der für Eins angenommenen Linie bekannt ist. Wenn dagegen auf die Lage oder Richtung mit Rücksicht genommen werden muß, wie das bey algebraischen Rechnungen gewöhnlich der Fall ist, und wenn alsdenn die Linie A der für Eins angenommenen entgegen gesetzt ist, so läßt sich in dem Sinne, wie es nun verlangt wird, die Linie $\sqrt[n]{-A}$ nicht allemahl angeben.

22. §.

Weil man zur Gleichheit zweyer Verhältnisse mehr fodert, als daß die relative Grösse der beyden vorhergehenden Glieder gegen beyde nachfolgende einerley sey; weil auch überdem beyde Glieder des einen Verhältnisses einander entgegen gesetzt, oder nicht entgegen gesetzt seyn müssen, nachdem sich beyde Glieder des andern Verhältnisses in dem ersten oder in dem andern Fall befinden; so giebt es zwischen zweyen entgegen gesetzten Grössen gar keine mittlere geometrische Proportionallinie. Zwischen $+1$ und $+A$ ist sowohl $+\sqrt{A}$, als auch $-\sqrt{A}$ eine mittlere geometrische Proportionallinie; aber zwischen $+1$ und $-A$ fällt gar keine. Diese letztere müste entweder positiv oder negativ, oder $=0$ seyn, aber von diesen dreyen Fällen kann keiner bestehen, wofern nicht im letzten Fall A selbst $=0$ ist. Auch die geometrische Construction ergiebt

giebt es, daß die Operationen, wodurch eine solche mittlere geometrische Proportionallinie gefunden werden müste, einander widersprechen. Es sey AD $= +1$, und DB $= +A$, man theile AB bey C in zwey gleiche Theile, beschreibe mit dem Halbmesser AC eine Kreislinie, ziehe durch D eine grade Linie auf AB senkrecht, und verlängere sie, bis sie die Kreislinie trift. Das Stück zwischen D und dem Durchschnittspunct mit dem Kreise ist nun zwischen $+1$ und $+A$ die mittlere geometrische Proportionallinie. Weil es aber zwey Durchschnittspuncte E und F mit dem Kreise giebt; so kann so gut DF als DE für die gesuchte Linie angenommen werden: mithin verstattet die Aufgabe eine doppelte Auflösung. Nimmt man aber AD $= +1$, DB $= -A$ und verfähret übrigens wie vorhin, so kann die senkrechte Linie DE oder DF den Kreis nicht treffen: demnach ist es unmöglich zwischen $+1$ und $-A$ eine mittlere geometrische Proportionallinie zu finden. Das drückt der Algebraiste so aus, es sey $\sqrt{-A}$ eine unmögliche Grösse. Man weiß, daß es mit allen Wurzeln gerader Exponenten aus negativen Grössen eben die Bewandniß habe, und eben diese Ausziehung der Wurzeln aus negativen Grössen hat die erste Veranlassung dazu gegeben, daß bey den Algebraisten zuweilen von unmöglichen Grössen die Rede ist. Eigentlich sollte man sagen, $\sqrt{-A}$ bezeichne etwas unmögliches: indessen stößt man sich sonst in andern Fällen nicht daran, wenn man vom Zeichen so redet, als wenn es die bezeichnete Sache wäre. Die Ziffern 2, 3, 4, u. s. w. sind keine Zahlen sondern Zahlzeichen; wir reden aber oft so, als wenn es die Zahlen selbst wären. Auch die Buchstaben a, b, x, y, nennen wir Grössen, wenn sie gleich nur Zeichen davon sind.

Fig. 34.

Fig. 35.

23. §.

Die Ausdehnung der arithmetischen Begriffe, welche die Wörter, Multipliciren, Dividiren, nach ihrer ursprüng-

ursprünglichen Bedeutung ausdrücken, auf geometrische Constructionen, und der darauf gegründete Gebrauch algebraischer Rechnungen in der Geometrie, rührt, wie es sehr bekannt ist, vornemlich vom H. Descartes her, oder wenigstens hat seine im Jahr 1637 zuerst in französischer Sprache herausgegebene Geometrie es vornemlich veranlasset, daß man sich nach der Zeit weiter kein Bedenken darüber machte, die Theorie von den krummen Linien mit Hülfe algebraischer Rechnungen zu erleichtern. Wenn es also darauf ankommt, den algebraischen Sprachgebrauch festzusetzen; so ist des H. Descartes Geometrie ein classisches Werk. Völlig so, wie ich oben im 18ten bis 21. §. die eben erwehnten Begriffe festgesetzt habe, sind sie gleich im Anfange des 1. Buches vorgetragen. Ich setze eine Stelle aus der Schootenschen lateinischen Ausgabe, Amst. 1659. hieher:

„Quemadmodum Arithmetica tota ex quatuor aut quinque solum modo operationibus constat, quae sunt Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio et Radicum Extractio, (quae pro quadam Divisionis specie haberi potest:) Ita similiter in Geometria, quod spectat ad lineas, quae quaeruntur, praeparandas, vt cognitae fiant, aliud faciendum non est, quam vt vel ipsis addantur, vel ab iisdem subtrahantur aliae; vel etiam si vna sit, (quae vocetur vnitas, vt eo commodius ad numeros referatur, quamque communiter pro libitu assumere licet) atque praeter hanc adhuc aliae duae, vt ad ipsas inueniatur quarta, quae sit ad alterutram, vt est altera ad vnitatem, quod idem est, atque *Multiplicatio;* vel vt per ipsas inueniatur quarta, quae sit ad vnam ex illis duabus, vt vnitas ad alteram, quod conuenit cum *Divisione;* vel denique, vt inter vnitatem et aliam quandam rectam inueniatur vna, aut duae, pluresue mediae proportionales, quod idem est, quod radicis Quadratae aut Cubicae, etc. extractio.„

Nach

Nach dieser Stelle folgt die Multiplication und Division einer graden linie mit einer andern durch Verzeichnung völlig so wie oben im 18. §. nur daß hier die verschiedenen Fälle, nachdem beyde grade linien einander entgegen gesetzt oder nicht entgegen gesetzt sind, noch nicht berührt werden. Die Ausziehung der Quadratwurzel vermittelst der hier im 22. §. gebrauchten Verzeichnung folgt ebenfalls. Nachher folgt noch von neuen die nachstehende Erinnerung:

„Vbi notandum est, quod per a^2, vel b^3, similesue communiter, *non nisi lineas omnino simplices* concipiam, licet illas, vt nominibus in Algebra vsitatis vtar, Quadrata, aut Cubos, etc. appellem.„

24. §.

Diesemnach ist es dem Cartesianischen Sprachgebrauch ganz genau gemäß, daß algebraische Producte grader linien ineinander, also auch Potenzen, wovon die Wurzel eine grade linie ist, nichts anders als grade linien vorstellen. Vieta beobachtet diesen Sprachgebrauch noch nicht, bey ihm sind a. b, so wie a^2, Flächen, und a. b. c, a^3, sind körperliche Räume. Das Product und jeder Factor sind beym ihm heterogen, und eben darum auch Dividendus und Divisor. (In artem Analyticam Isagoge, Cap. III. M. s. Franc. Vietae Opus restitutae Mathematicae Analyseos, seu Algebra noua, Turonis 1591, pag. 4; auch Francisci Vietae Opera Mathematica, opera atque studio Franc. a Schooten, Lugd. Bat. 1646. pag. 2.). Allein Cartesens Geometrie ist der eigentliche Grund, auf welchem das ganze Gebäude der neuen Geometrie ist aufgeführet worden: also leidet es keinen Zweifel, daß der von ihm festgesetzte Sprachgebrauch beybehalten werden müsse, wenn man nicht alles wieder in Verwirrung bringen will. Das einzige, was man hiebey noch erinnern mögte, betrift den Umstand, daß Descar-

tes die negativen Wurzeln der Gleichungen noch falsche Wurzeln nennt: allein wenn man gewohnt ist, beym Lesen eines Schriftstellers mehr auf die Sache als auf die Worte zu sehen; so ist aus der Art, wie Descartes die negativen Wurzeln bey der Construction der Gleichungen behandelt, leicht abzunehmen, daß er schon sehr richtig davon gedacht habe. Die ersten Grundregeln der Buchstabenrechenkunst und der Rechnung mit entgegen gesetzten Grössen trägt er selbst nicht vor, sondern setzt sie als bekannt voraus, so wie die Schriftsteller von der Algebra sie damahls vorzutragen gewohnt waren. Man rechnete schon sehr richtig mit negativen Zahlen, die Sache selbst kannte man: nur war man nicht gleich darauf verfallen, die schicklichsten Nahmen und Redensarten zu wählen. Es wird genügen, wenn ich nur einige Stellen aus einem ältern sonst noch in andrer Absicht merkwürdigen Cossisten anführe.

25. §.

Schon Mich. Stifelius in der Arithmetica integra, Norimb. 1544, erklärt sich nach damahliger Art sehr richtig über die Natur der negativen Zahlen, ob er sie gleich numeros absurdos nennt. Im V. Cap. des III. Buches pag. 249. woselbst die 4 einfachen Grundoperationen mit Exempeln erläutert vorkommen, setzt er hinzu:

„vides certe, vt haec omnia vanissimis nugis videantur esse simillima, et tamen Cossicae operationes secundum ea factae plane mirificas inuentiones habent. — — — Quemadmodum autem varia *finguntur* radices numerorum sub numeris non habentibus eas radices, fitque haec fictio summa vtilitate pro rebus mathematicis: ita *finguntur etiam* non frustra numeri *infra* o, id est *infra* nihil.„

Was weiter folgt, ist zugleich die nähere Einleitung zu der bekannten merkwürdigen Stelle, welche den Grund der ganzen Theorie von den Logarithmen enthält, obgleich

der

der Nahme noch nicht gebraucht ist, auch keine weitere Anwendungen davon gemacht werden. Ich muß doch noch einiges zur Probe beyfügen: es betrift das Exempel $(8-2)-(10-5)=3-2$. Dabey scheint es mir vornemlich bemerkungswerth zu seyn, daß Stiefel nicht numerus nihilo *major*, nihilo *minor*, sondern numerus *supra* o, *infra* o, sagt. Diese letzte Art sich auszudrücken ist mit der ersten gewiß nicht ganz einerley. Stiefel siehet die o als eine gemeinschaftliche Gränze der mit + und (—) bezeichneten Zahlen an, die von dieser Gränze an nach beyden Seiten auf entgegen gesetzte Art fortgezählet werden.

„Primo subtraho 10 de 8 et non inuenio numerum aliquem supra o, id est supra nihil, quem ponere possim justa subtractionis lege Nam si ille a quo debet fieri subtractio, esset major eo, qui subtrahitur (vt si loco numeri 8 poneretur numerus 12) tum tandem haberem numerum ponendum verum. Sic si ille numerus, a quo fieri debet subtractio, esset aequalis ei, qui subtrahitur (vt si loco 8 ponerentur 10,) tunc relinquererur o, i. e. nihil. (*quod mediat inter numeros veros et numeros absurdos*) Iam vero, cum numerus subtrahendus major sit eo, a quo sit subtractio, restat vt numerus *infra* o, i. e. *infra* nihil ponatur, videlicet $0-2$. *Sic simili ratione* postea subtraho $0-5$ de $0-2$, et inuenio $0+3$, i. e. numerum *supra* nihil, seu numerum verum. Sic Cossa solet, pro immensa copia sua iis vti *quae sunt*, et iis *quae finguntur esse*. Nam sicut *supra* vnitatem ponuntur numeri integri, et *infra* vnitatem *finguntur* minutiae vnitatis, et sicut *supra vnum* ponuntur integra, et *infra vnum* ponuntur minuta seu fracta: sic *supra* o ponitur vnitas cum numeris, et *infra* o *fingitur* vnitas cum numeris. Id quod pulchre repraesentari videtur

in progressione numerorum naturali, dum seruit progressioni.

Sed ostendenda est ista speculatio per exemplum.

— 3	— 2	— 1	0	1	2	3	4	5	6
1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64

Wenn man diese Stelle mit einer andern im I. Buch IV. Cap. 35. u. f. S. besonders auch 37. 38. S. vergleicht, so findet man darin nicht allein das alles, worauf die Lehre von den Logarithmen beruhet; sondern auch einen sehr geschickten Gebrauch der negativen Zahlen. Die Zahlen 1 2 3 4 5 u. s. f. zeigen an, wie die Verhältnisse 4:1, 8:1, 16:1, 64:1, aus dem Verhältnisse 2:1 entstehen; und eben so die Zahlen —2, —3, und s. f. wie die Verhältnisse 1/4:1, 1/8:1, aus dem Verhältnisse 1/2:1, welches dem Verhältnisse 2:1 entgegen gesetzt ist, durch die Zusammensetzung entstehen. Hätte Stiefel seine Algebra auf die Geometrie angewandt, so zweifle ich gar nicht, daß er nicht grade linien, die von einerley Punct sich nach entgegen gesetzten Richtungen erstrecken, durch die Zeichen + und (—) würde unterschieden haben. Weil er den Nahmen numeri absurdi einmahl gewohnt war, so hätte er vielleicht linien, die nach der Rechnung negativ seyn sollten, auch lineas absurdas genannt, bey alle dem aber hätte er dem Ausdruck doch seinen arithmetischen Vorstellungen gemäß einen sehr richtigen Sinn beylegen können.

26. §.

Ich glaube, daß grade das der Fall bey dem Sprachgebrauch sey, welchen Descartes in seiner Geometrie beobachtet. Er nennet die negativen Wurzeln der Gleichungen falsche Wurzeln, (auch kleiner als Nichts) weil die Algebraisten sie bis dahin immer so genannt hatten, er braucht also das Wort als ein eingeführtes wissenschaftliches Kunstwort, weil man noch kein andres hatte. Uebrigens aber läßt er die so genannten falschen Wurzeln kei-

nes-

nesweges weg, als wären es solche, worauf man bey Auflösung einer Aufgabe nicht Rücksicht zu nehmen hätte: er verlangt vielmehr ausdrücklich, daß die geometrische Construction der Gleichung alle sowohl wahre als falsche Wurzeln der Gleichung darstellen solle. So verfährt er auch a. a. O. im III. Buch 85 — 88. S. der Schootenschen Uebersetzung bey Construction einer biquadratischen Gleichung vermittelst des Kreises und der Parabel. Sein Ausleger Schooten verstehet ihn auch völlig so, wie ich mir die Vorstellung davon gemacht hatte, ehe ich noch in dem Schootenschen Commentar 310. S. die nachstehende Stelle gelesen hatte.

„Potest autem hic eleganter ostendi vsus, quem radices tam falsae quam verae alicujus aequationis in Geometria habent, ac quo pacto earum ope ad *plenam* alicujus Problematis cognitionem perducamur; sic vt nullus casus existat, quem non detegamus, atque ejusdem determinationem non inueniamus. Scien-dum enim est, quod, quemadmodum verae radices in Arithmetica (vt supra indicauimus) quantitatem aliquam designant, majorem quam nihil, et falsae defectum alicujus quantitatis, seu quanto nihilo sunt minores, sic in Geometria verae radices eas communiter lineas designent, sensu illo, quales inueniendae proponuntur, at vero falsae *sensu contrario*. Adeo vt si verae accipiantur in data recta indefinita ac dato puncto versus aliquod in ea punctum designatum progrediendo, *falsae* in ipsa ab eodem puncto sumi debeant *versus contrarium punctum*, regrediendo.„

27. §.

Schooten erläutert den Gebrauch der mit (—) bezeichneten Zahlen in der Rechenkunst mit einem Exempel, wodurch es ungemein ins Licht gesetzt wird, daß die alten Algebraisten grade davon so gedacht haben, wie wir jetzt

davon

davon denken, obgleich ihre Art sich darüber auszudrücken noch nicht die schicklichste war.

„Von zweyen Kaufleuten in Amsterdam hat jeder seinen eigenen Commissionär in Venedig, beyde trauen aber ihren Commissionärs nicht recht, und tragen darum den letztern auf, daß sie einander Rechnung abzulegen hätten von dem sämtlichen ihren Mandanten zuständigen Gelde, was jeder vorräthig hätte. Wenn einer von beyden vielleicht etwas schuldig wäre, so sollte es von dem Gelde des andern bezahlt, der baare Ueberschuß aber wieder in der Handlung jedoch mit der Bedingung angeleget werden, daß keiner von beyden Commissionärs für sich allein etwas unternähme, was der andre nicht billigte. Beyde Kaufleute zu Amsterdam richten indessen in Ansehung der zu Venedig nach abgeschlossener Rechnung für sie gemeinschaftlich vorräthig bleibenden Summe die gewöhnliche Handlungs-Societät auf, wobey die Bedingung zum Grunde liegt, daß Gewinst oder Verlust im Verhältniß des jedem zuständigen Theiles der vorräthig bleibenden Summe unter ihnen vertheilt werden soll.„

Nun findet es sich, daß A 5000 fl. baar vorräthig hat, und B 2000 fl. schuldig ist; diese letztern werden also von jener Summe bezahlt, und mit dem Ueberschuß der 3000 fl. werden 12000 fl. gewonnen: die Frage ist, wie dieser Gewinst unter beyden vertheilt werden müsse?

Schooten antwortet: weil der Gewinst 4mahl soviel als das angelegte Capital ausmacht, so muß jeder auch viermahl soviel erhalten, als er eingelegt hat; mithin erhält A $+4\times5000=20000$ fl., und B $=-4\times2000=-8000$ fl. Das heißt, weil A wirklich 5000 fl. hatte, so hätte er bey eben dem Geschäfte 4×5000 fl. gewonnen, wenn alles das Geld baar da gewesen wäre. Weil nun B die fehlenden 2000 fl. erhalten hatte; so ist

er

er die Ursache des Verlustes der 8000 fl. und muß sie dem A ersetzen.

Wie aber umgekehrt, wenn anstatt der 12000 fl. Gewinst 12000 fl. Verlust eingetreten wäre?

Die Antwort ist: nun hätte A 20000 fl. verlohren, und B dagegen 8000 fl. gewonnen: also muß A dem B 8000 fl. zahlen.

Ob der Jurist in beyden Fällen die Sentenz eben so abfassen würde, das ist eine andre Frage: ich führe das Exempel nur an, um zu zeigen, daß die Schootensche Beantwortung der Frage mit der jetzt allgemein angenommenen richtigen Vorstellung von dem, was negative Grösse sey, sehr wohl übereinstimme. Die baare Summe ist $+5000-2000$, sie bestehet aus einem positiven und negativen Theile. In dem ersten Falle soll jeder das vierfache des ihm zuständigen Theiles haben, in dem andern Falle aber eine Summe, die dem vierfachen des ihm zuständigen Theiles entgegen gesetzt ist.

28. §.

Der Benennung falsche Wurzeln, Wurzeln unter Nichts, ungeachtet, haben sich also die ältern Algebraisten oder Cossisten wenigstens zum Theil über die Natur dieser Wurzeln schon sehr richtig erklärt; Descartes trägt die Elemente der Algebra, so weit man sie damahls kannte, gar nicht vor; sondern setzt sie als bekannt voraus, also war es sehr natürlich, daß er den damahls üblichen Sprachgebrauch beobachten muste. Jedermann nannte die negativen Wurzeln der Gleichungen falsche, erdichtete Wurzeln, Wurzeln unter Nichts, man war diese Sprache gewohnt, und niemand nahm Anstoß daran. Descartes ist also gewiß, wo nicht der erste, wie es Montucla (Histoire des Mathematiques Tom. II. Part. IV. Liv. II. pag. 85.) grade zu behauptet, doch einer der ersten, der den richtigen Gebrauch der negativen Wurzeln

zeln bey Anwendung der Algebra auf die Geometrie gewiesen hat, nachdem Vieta und Harriot den Gebrauch ganz allgemeiner Zeichen bey algebraischen Rechnungen gewiesen hatten. Wenn Descartes mit dem Worte falsche Wurzeln die Natur dieser Wurzeln hätte anzeigen wollen, so hätte er im zweyten Buche nicht so vollkommen richtig und deutlich die Wurzeln der Gleichungen in reelle und imaginäre, die reellen aber wieder in wahre und falsche Wurzeln eintheilen können.

„Au reste tant les *vrais* racines que les *faulses* ne sont pas toujours reelles, mais quelques fois seulement *imaginaires*.„

Eben diese Bemerkung macht Rabuel bey der angeführten Stelle. (M. s. Commentaires sur la Geometrie de M. Descartes par le R. P. Claude Rabuel, A Lyon 1730, pag 421. 450. In der Schootenschen Uebersetzung findet sich diese Stelle pag. 76.) Unter andern wird daselbst ganz unten p. 421. gesagt, Descartes hätte auch die Ausdrücke positiua supra, und positiua infra anstatt wahre und falsche Wurzeln gebraucht: dabey wird auf den III. Theil der Cartesischen Briefe n. 78. verwiesen, woselbst ich das nicht finde. Indessen läßt mir die Stelle, welche ich oben im 21. §. aus der Schootenschen Uebersetzung angeführet habe, womit man im Comment. par Rabuel pag. 509. sqq. vergleichen kann, weiter gar keinen Zweifel übrig, daß Descartes von seinen wahren und falschen Wurzeln sich eben die Begriffe gemacht habe, die wir uns jetzt davon machen, und daß man aus dem damahls allgemein üblich gewesenen Nahmen nichts schliessen könne.

29. §.

Daß der Sprachgebrauch der alten Algebraisten, wenn sie die mit (—) bezeichneten Wurzeln der Gleichungen, falsche, erdichtete, Wurzeln unter Nichts, nennen vormahls keinen Anstoß verursachet, daß man vielmehr

mehr diese Nahmen als Kunstwörter, die ihre festgesetzte Bedeutung hätten, betrachtet habe, solches erhellet, wie es mir scheinet aus vielen Stellen späterer Schriftsteller. Schooten und Rabuel, wenn sie gleich alle beyde sich vollkommen richtig über die Sache selbst erklären, reden doch alle beyde eben so. Beym Rabuel a. a. O. 421. §. heißt es im Commentar:

„Il (Descartes) apelle racines vrayes celles, dont la valeur est plus grande que zero, fausses celles dont la valeur est moindre que zero. — — — Zero est pour ainsi dire, le terme ou les racines vrayes et fausses commencent, les unes allant d'un coté en croissant, 0, +1, +2, +3, ... les autres allant de l'autre en decroissant 0, —1, —2, —3, ...

Das Wachsen der negativen Wurzeln stellte man sich als ein Abnehmen unter 0 vor. *L'Hopital* (Traité des Sections Coniques, a Paris 1720. Livre VII. §. 304.) erklärt ganz richtig, was positive und negative Abscissen oder Applicaten sind, setzt aber hinzu:

„Les positives de ces valeurs s'appellent aussi *Valeurs vraies*, et les negatives *Valeurs fausses*.„

Selbst Newton, von dem doch der neuere Sprachgebrauch, wenn man jetzt lieber positive und negative Wurzeln sagt, vornemlich herrührt, giebt in der Arithmetica Universali Lugd. Bat. 1732. pag. 5. keine andre als diese Erklärung:

„*Quantitates vel* Affirmatiuae *sunt seu majores nihilo, vel* Negatiuae *seu nihilo minores*.„

Gleich darauf folgt das bekannte Exempel von Vermögen und Schuld, nachher aber folgen bessere, die von der Lage und Richtung grader Linien, auch von entgegen gesetzten Bewegungen hergenommen sind. Der Vortrag der berühmten Maria Gaetana *Agnesi*, (Institutioni Analitiche ad vso del la Gioventu' Italiana, in Milano, 1748, Tom. I. Cap. I. n. 2. pag. 2.) ist völlig so, wie beym Newton,

„Ma

„Ma della Quantità altre ſono poſitive, cioè maggiori del nulla, altre minori del nulla, e però negative.„

Es folgen auch eben die Exempel, unter welchen das erſte von Vermögen und Schuld hergenommene, was alle Algebraiſten haben, die Sache ſonſt ganz gut erläutert, wenn es nur nicht ſo gar leicht den Mißverſtand veranlaßte, als wenn poſitive Gröſſe nur was wirkliches, negative Gröſſe aber was fehlendes, nur Defect ſey. Man wird verleitet, das verneinende in der Sache ſelbſt zu ſuchen, da es doch ſchlechterdings nur den Ausdruck angehet. (6. §.) Mir erklärt es ſich daraus aufs vollkommenſte, wie es zugehet, daß H. Leonh. Euler ſogar, wenn er ſich über die Elementarbegriffe von algebraiſch-negativen Gröſſen erklären will, faſt allemahl den Ausdruck kleiner als Nichts braucht, ob er gleich vollkommen richtig redet, ſobald von geometriſchen Gröſſen die Rede iſt. Wer ſeine Introductionem in Analyſin Infinitorum lieſet, der wird daraus keine unrichtige Vorſtellung von der Sache lernen, wenn gleich in der kleinen deutſchen Algebra I. Abſchnitt 18. 19. §. dieſe Ausdrücke vorkommen. Das entgegen geſetzte von + 1 addiren, nennt er mit den alten Algebraiſten ſubtrahiren: daher kommt a. a. O. die Vorſtellung, daß die Reihe

0, —1, —2, —3, —4, —5, ...

entſtehe, wenn immer Eins mehr weggenommen wird. Man ſetze anſtatt dieſer Worte die folgenden: wenn immer wieder das entgegen geſetzte von Eins zugeſetzt wird; ſo iſt aller Anſtoß gehoben.

30. §.

Aus dem bisher beygebrachten erhellet es, wie ich glaube, zur Genüge, daß man von poſitiven und negativen Gröſſen lange richtig gedacht, auch die Begriffe davon ganz richtig angewandt habe, wenn man gleich den etwas unvollkommenen Sprachgebrauch der ältern Algebraiſten

ten beybehielte. Ein Hauptgrund davon war der, daß es an Schriftstellern fehlte, welche Gedult genug hatten, die Elemente genau durchzudenken, und alle merkwürdige Entdeckungen, welche man vermittelst der algebraischen Analysis gemacht hatte, mit den ersten Grundbegriffen in einen genauen und richtigen Zusammenhang zu bringen. Einer der ersten Schriftsteller, der dieses leistete, war der Freyherr von Wolff, die erste Ausgabe seiner lateinischen Elemente ist vom Jahr 1713, eine andre vermehrte und verbesserte vom Jahr 1730. Wer es weiß, was dazu gehört, eine so grosse Menge von Materialien, als dieses Werk enthält, wissenschaftlich zu ordnen, wovon viele vorher von den Erfindern nur als einzelne Untersuchungen waren vorgetragen worden, der wird gewiß die ungemein grossen Verdienste des H. von Wolff um die Wissenschaft nicht verkennen. Bey ihm sind die Nahmen quantitas *nihilo major*, *nihilo minor* (a nonnullis *absurda* wie er hinzusetzt, man vergleiche oben den 25. §.) so gut als die Nahmen quantitas *positiua*, *affirmatiua*, und quantitas *priuatiua*, *negatiua*, Kunstwörter. (Elem. Analyf. Finit. Cap. I. §. 16 pag. 299.) Die Vorstellungen davon, man könne das positive durch $0+a$, das negative durch $0-a$ ausdrücken, sind so wie bey den alten Algebraisten. Auch die Nahmen *radix vera*, *radix falsa*, werden als Kunstwörter erklärt: (a. a. O. 135. 136. §.) also folgt daraus gar nicht, daß H. von Wolff durch diese Nahmen die eigentliche Natur und Beschaffenheit solcher Grössen habe anzeigen wollen.

31. §.

Daß übrigens H. v. Wolffens Vortrag auf die Idee zu leiten scheine, als wenn das negative in der Sache selbst, nicht im Ausdruck allein zu suchen sey, ist wohl nicht zu leugnen. Indessen merkt er doch a. a. O. 25. §. sehr richtig an, daß ein Verhältniß wie $-3:-5$ dem Verhält-

nisse +3:+5 gleich sey, wenn er gleich im 24. §. behauptet hatte, eine negative und eine positive Grösse könne man als heterogene Grössen nicht vergleichen, von den beyden Gliedern eines Verhältnisses könne also nicht das eine mit + das andre mit (—) bezeichnet seyn. Auch diese letzte Behauptung ist in dem Sinne, wie H. v. Wolff sie nimmt, ganz richtig, und widerspricht dem eigentlich nicht, was ich oben im 15. und 16. §. davon festgesetzet habe, Man kann nicht fragen, wievielemahl +2 in —6 enthalten sey? wenn wir es gleich nun gewohnt sind, $\frac{-6}{+2}$ = —3 zu setzen. Wenn also auch in einem ganz richtigen Sinne gesagt werden kann, +2 sey —3mahl in —6 enthalten, so giebt doch das dem Quotienten voran gesetzte Zeichen (—) eben zu erkennen, daß nicht der Divisor selbst, sondern eine ihm entgegen gesetzte sonst aber gleiche Zahl 3mahl in 6 enthalten sey. Zwey Schritte vorwärts und sechs Schritte rückwärts sind weder 8 Schritte vorwärts noch 8 Schritte rückwärts zurück gelegter Weg: in diesem Sinne kann man sie wie andre ungleichartige Grössen nicht addiren. Wenn aber zwey Personen sich von einer gewissen Gränze nach entgegen gesetzten Richtungen entfernt haben, der eine 2 Schritte vorwärts, der andre 6 Schritte rückwärts; so sind doch beyde um 8 Schritte weit von einander entfernt: auch hat sich der eine 3mahl weiter als der andre von der gemeinschaftlichen Gränze entfernt. H. v. Wolff trägt die Theorie von den krummen Linien noch nicht in der Allgemeinheit vor, wie sie andre Schriftsteller, die grossentheils mit ihm zugleich lebten, ihn aber auch zum Theil noch überlebten, bearbeitet haben: sonst hätte die Betrachtung der positiven und negativen Abscissen und Applicaten, ihm gewiß nähere Veranlassung gegeben, sich über die Natur der entgegen gesetzten Grössen bestimmter zu erklären. Eine hieher gehörige

rige ganz richtige Stelle findet sich doch in den Elem. Anal. Infinitor. Cap. II. §. 29. Im Cap. VII. Anal. Finitorum, woselbst umständlich von der Construction der Gleichungen gehandelt wird, woselbst auch unter andern die Construction der cubischen und biquadratischen Gleichung vermittelst des Kreises und der Parabel vorkommt, und Cartesens Geometrie §. 613. selbst angeführt ist, wird es so bestimmt und deutlich, als Descartes es selbst sagt, nicht bemerkt, daß die entgegen gesetzten gemeinschaftlichen Applicaten des Kreises und der Parabel die entgegen gesetzten Wurzeln vorstellen.

32. §.

Nachdem wir im Jahr 1734. die vortreflichen Elementa Matheseos des Herrn Hausen erhalten haben, worin die Elementarbegriffe von positiven und negativen Grössen gleich Anfangs (a. a. O. Arithm. Prop. I. Schol. I. pag. 13. 14) im vollkommensten Lichte dargestellet werden, hat sich der ehemalige der Sache allerdings nicht recht angemessene Sprachgebrauch nach und nach aus den später erschienenen Lehrbüchern immer mehr verlohren. Hiezu haben überdem auch die Vorlesungen über die Rechenkunst und Geometrie des H. von Segner, Lemgo 1747, sehr vieles beygetragen. Man findet darin keine Spur mehr von dem Sprachgebrauch der alten Cossisten, vielmehr ist daselbst bey dem Vortrage der ersten Elementarbegriffe (a. a. O. 72—75. §. der Rechenk. 26. 27. S.) alles sorgfältig verhütet worden, was die unrichtige Vorstellung veranlassen könnte, als wenn eine mit (—) bezeichnete Zahl einen Defect und die mit + bezeichnete nur etwas wirkliches anzeigen solle. Eben diese beyden Schriftsteller haben die Elemente der algebraischen Analysis mit den Grundsätzen der Cartesianischen algebraisch-analytischen Geometrie in die genaueste Verbindung gebracht, wie es sich aus den gleich folgenden Bemerkungen ergeben wird.

33. §.

Was die beyden ersten Grundoperationen, die Addition und Subtraction betrift, so war es schon von selbst klar, daß $-5+3$ so gut $=-2$ seyn müsse, als $+5-3=+2$ wird, wenn man die Voraussetzung nicht aus der Acht lässet, daß dergleichen Rechnungen nur auf solche Grössen angewandt werden, welche nicht allein bis auf o abnehmen, sondern auch in den entgegen gesetzten Zustand übergehen können. Es war eben so klar, das -2 von -5 subtrahiret so gut den Rest -3 lassen müsse, als $+2$ von $+5$ subtrahirt den Rest $+3$ läßt. Sollte die algebraische Addition entgegen gesetzter Grössen wie $+5$ und -3, oder -5 und $+3$, eine Verminderung des grössern um das kleinere seyn, und sollte die algebraische Subtraction das wieder aufheben, was die algebraische Addition bewirkt hatte; so muste die letzte eine Vermehrung bewirken, wenn die erste eine Verminderung bewirkt hatte. Denn eine vorgegangene Verminderung wieder aufheben, das heißt, eine eben so grosse Vermehrung bewirken. Diesemnach muß -3 von $+2$ algebraisch subtrahiren soviel heissen, als $+2$ noch um 3 vermehren. Allemahl wird die Grösse, wovon man subtrahirt, als ein Ganzes angesehen, und was man subtrahiren soll, als ein Theil, welchen man wegnehmen muß. Aber $+2=+5-3$ ist ein algebraisches Ganzes, das aus den einander entgegen gesetzten Theilen $+5$ und -3 bestehet: den negativen Theil -3 wegnehmen heißt also, den positiven Theil $+5$ ganz wieder herstellen. Es ist vielleicht nicht ganz überflüssig, wenn ich die Erinnerung aus dem 15. §. wiederhohle, daß die sonst bekannten arithmetischen und geometrischen Grundsätze hier keine Anwendung finden: es liesse sich sonst daraus beweisen, ein Theil könne grösser als das Ganze seyn. Man vergleiche oben den 62. §. der II. Abhandlung.

34. §.

34. §.

Oben im 18. und 20. §. ist es schon bemerkt worden, was vermöge des in Cartesens Geometrie festgesetzten Sprachgebrauchs algebraische Multiplication sey, wenn die Factoren grade Linien sind, und was algebraische Division sey, wenn der Dividendus eine grade Linie ist, der Divisor mag entweder auch eine grade Linie oder eine Zahl seyn. Descartes selbst, so wie seine oben angeführten Ausleger, auch Newton, (Arithm. Vniv. pag. 6. 7.) tragen insgesammt eine geometrische Construction vor, um die algebraisch-geometrische Multiplication und Division vorstellig zu machen, welche mit der von mir oben im 18. §. vorgetragenen völlig einerley ist. Sie lassen es aber alle dabey bewenden, zu zeigen, daß man vermittelst dieser Construction die Grösse der gesuchten Linie finde, ohne auf ihre Lage Rücksicht zu nehmen, die auch vermittelst der Construction verschieden gefunden wird, nachdem man die eine von beyden gegebenen Linien oder alle beyde auf den verlängerten Schenkeln des Winkels an der andern Seite der Spitze nimmt. Man war, wie es scheint, der Regeln, nach welchen das Zeichen des Products oder des Quotienten aus den Zeichen der gegebenen Grössen gefunden wird, so sehr gewohnt, daß man nicht sehr um einen recht einleuchtenden Beweis besorgt war; sonst war es an sich ungemein leicht darauf zu verfallen. Die festgesetzten Cartesischen Begriffe der algebraischen Multiplication und Division finden, wenn es darauf ankommt diese Regeln zu beweisen, ihre unmittelbare Anwendung, wenn man den Begriff der Gleichheit zweyer Verhältnisse nur dahin einschränkt, daß die Glieder des einen einander entgegen gesetzt, oder nicht entgegen gesetzt seyn müssen, nachdem die Glieder des andern Verhältnisses sich in dem einen oder dem andern Falle befinden. (15. §.)

35. §.

Mir ist kein früherer Schriftsteller bekannt, der diese Anwendung der Cartesischen Begriffe von der algebraischen Multiplication und Division auf die Lehre von den entgegen gesetzten Gröſſen so ganz bestimmt und deutlich gewiesen hätte, als H. Hausen in den Elem. Mathes. Prop. III. Schol. 2. pag. 19. sq. und bald nachher H. von Segner in den oben im 27. §. ebenfalls erwehnten Vorlesungen über die Rechenkunst und Geometrie, XIII. Abschnitt. 53. u. f. §. 648 u. f. S. auch eben so im I. Theil des Cursus Mathem. Halae Magd. 1756. Arithm. Vniv. Sect. I. §. 35. pag. 268. 269. und noch vollständiger in eben dieses Cursus Mathem. Tom. II. 1758. Sect. II. §. 90. 91. Eben daselbst wird zugleich gewiesen, daß in den hier vorkommenden bekannten vier Fällen durch die Construction beydes die Gröſse und Lage der gesuchten graden Linie so gefunden werde, wie es den längst bekannt gewesenen Rechnungsregeln gemäß ist. Der Vortrag dieser Lehren in den Instirut. Anal. der Maria Gaetana Agnesi, Cap. I. §. 7. 12. pag. 6. 7. 10. 11. wenn gleich diese Schriftstellerin die ersten Grundbegriffe eben so vorträgt, wie sie in Newtons Arithm. Vniv. stehen, (m. s. oben den 29. §.) ist übrigens völlig so, wie beym H. Hausen; die Regeln nach welchen man das Zeichen des Products a.b, oder des Quotienten $\frac{a\,b}{b}$ finden soll, werden aus den Proportionen $1 : a = b : a.b$, und $a.b : b = a : 1$ hergeleitet, mit der Voraussetzung, daß die beyden nachfolgenden Glieder übereinstimmige oder entgegen gesetzte Zeichen haben müssen, nachdem sich die beyden vorhergehenden Glieder in dem ersten oder in dem zweyten Falle befinden. Es ist unter andern daraus abzunehmen, daß diese Schriftstellerin den Ausdruck: Gröſse unter Nichts, anstatt negative Gröſse, für nichts anders als ein Kunstwort

wort angesehen habe, keinesweges für einen Ausdruck, der die Sache selbst bezeichnen soll.

36. §.

H. Maclaurin (Treatise of Algebra London 1756. §. 7. pag. 6. 7.) erklärt sich über diesen Sprachgebrauch so bündig, daß ich nicht umhin kann, die Stelle ganz hieher zu setzen. Die Rede ist von der positiven und negativen Grösse, und H. Maclaurin fährt so fort.

„The are equally real, but opposite tho each other, so as to take away each others effect, in any operation, when thay are equal as to quantity. Thus $3 - 3 = 0$, and $a - a = 0$. But though $+a$ and $-a$ are equal as to quantity, we do not suppose in Algebra that $+a = -a$; because to infer equality in this science, they must not only by equal as to quantity, bot of the some quality, that in every operation the one moy have the same effect as the other. (Man vergleiche oben den 15. §.) A decrement moy be equal to an increment, but it has in all operations a contrary effect; a motion down wards may be equal to a motion upwards, and the depression of a star below the horizon moy be equal to the elevation of a star above it: but those positions are opposite, and the distance of the stars is greater than if one of them was at the horizon so as to have no elevation above it, or depression below it. It is on account of this contrariety that a negative quantity is said to be *less than nothing*, because it is opposite tho the positive, and diminishes it when joined to it, whereas the addition of o has no effect.

Diese Stelle wäre die vollkommenste Vertheidigung des Sprachgebrauchs, wenn es noch gewöhnlich wäre, Grössen unter Nichts anstatt negative Grösse zu sagen. Hiemit verdient eine Stelle aus einer kleinen Schrift mei-

nes ehemahligen Lehrers, des jetzigen Herrn Etaats-Rath Aepinus in Petersburg, De notione quantitatis negativae Rostochii 1754, verglichen zu werden. Die Bekanntmachung einer solchen Schrift, wenn sie sich gleich nur mit der Erörterung eines Elementarbegriffes beschäftigte, war zu der Zeit noch nicht überflüssig, wenn wir gleich die Hausenschen und Segnerischen Lehrbücher schon hatten: andrer zu geschweigen, die grösstentheils nur aus den Wolfischen Schriften genommen waren, ohne mehr zu leisten, ja ohne vielleicht einmahl ihren um die mehrere Ausbreitung mathematischer Kenntnisse unter den deutschen Gelehrten sehr verdienten Vorgänger zu erreichen.

37. §.

H. Aepinus bemerkt in der angeführten Schrift unter andern sehr richtig, daß man um alle Mißdeutung zu vermeiden lieber quantitas negatiue expressa und nicht quantitas negatiua sagen könnte. Mit dem alten Sprachgebrauch, wenn man radix falsa sagt, ist er nicht zufrieden, glaubt auch, daß H. v. Wolff so wie mehrere andre durch den Nahmen zu unrichtigen Vorstellungen von der Sache selbst wären verleitet worden. Bey dem allen äussert er, daß man den alten Nahmen *quantitas nihilo minor* mit mehrern Rechte dulden könne. Er setzt folgendes hinzu.

„In se quidem spectatum hoc nomen absonum non videri non potest, quis enim quaeso, cui mens est imperturbata, concipere potest quantitatem parti ex nihili, quod nullas habet partes, aequalem. (Der H. Verf. hat die Definition im Sinne, *minus* est altero quod parti alterius aequale est.) Sed salua adhuc res est, nec enim hoc hac voce indicare vnquam in mentem venit Mathematicis. Indigitare enim potius volunt hac locutione ortum ejusmodi quantitatis ex positiua, qui fit transeundo per o. etc.„

Es folgt hiernächst noch die ganz richtige Bemerkung, daß man eben so gut Wallisii Ausdruck Grösser als Unendlich dulden könne, woran man sich doch so sehr gestossen hat. Wenn nemlich der Nenner des Bruchs $\frac{1}{x}$ veränderlich ist, und wenn eben dieser Bruch bis zur Gränze ∞ wächst, vorausgesetzet daß $+x$ bis auf 0 abnehme, so folgt sehr natürlich, daß $\frac{1}{-x} > \infty$ werde, wenn $-x < 0$ wird. Ich werde diese Bemerkung bald nachher noch in andrer Absicht nutzen.

38. §.

Die lehre von verneinten Grössen war also von den bisher angeführten Schriftstellern, als die zweyte Hälfte des jetzt noch laufenden Jahrhunderts anfieng, so weit zur Richtigkeit gebracht, daß auch die Ausdrücke genau genug mit der Sache übereinstimmten: wer vielleicht auch noch den Ausdruck kleiner als Nichts brauchte, und sich so darüber erklärte, wie die Herrn Maclaurin (36. §.) und Aepinus, (37. §.) der verdiente doch wohl weiter keinen Tadel, als der verdienen würde, der lieber Zenßzahl anstatt Quadratzahl sagen wollte. Indessen ist es allerdings ein Vortheil für die Wissenschaft, wenn auch der Sprachgebrauch so genau und richtig der Sache augemessen ist, daß er nicht leicht einen Mißverstand veranlassen kann. Deutsche Schriftsteller werden nun nicht leicht mehr so wie die alten Algebraisten reden, wenn sie gleich der alten Art sich auszudrücken wohl um deßwillen erwehnen, damit angehende Mathematiker auch mit dem ehemaligen Sprachgebrauch bekannt werden. Auswärtige besonders französische auch neuere Schriftsteller reden zum Theil noch so, jedoch nur, wenn sie die Elemente vortragen, wobey sie die nöthige Strenge gewöhnlich nicht so genau

als deutsche Schriftsteller beobachten: bey der Anwendung auf die Theorie von den krummen linien erklären sie sich wenigstens in der Hauptsache völlig richtig. Zu wünschen wäre es, daß der Sprachgebrauch auch bey andern Lehren, die bisher ähnlichen Anstoß verursachet haben, ebenfalls immer mehr berichtiget würde. Die Vorstellung, daß das negative kleiner als o und grösser als das Unendlichgrosse sey, hängt eben so natürlich mit der algebraischen Zeichensprache zusammen, als die mancherley Vorstellungsarten von Unendlichkleinen oder Unendlichgrossen, und den unzählich vielen Ordnungen desselben. (M. s. oben die I. Abhandlung 29. u. f. auch 34. u. f. §.) Hat man es aber nöthig gefunden, den Sprachgebrauch in der Lehre von den entgegen gesetzten Grössen zu berichtigen, warum denn auch nicht in der für die ganze Mathematik so äusserst wichtigen Lehre von den Gränzen veränderlicher Verhältnisse und Summen? (Man vergleiche auch a. a. O. den 39. §.)

39. §.

Man weiß, daß es bey der Anwendung der algebraischen Analysis auf die Theorie von krummen linien nicht so sehr darauf ankommt, aus bekannten Grössen eine oder mehr unbekannte Grössen zu finden, als vielmehr darauf, daß man allgemeine Untersuchungen über die Gesetze anstellet, nach welchen zwey oder mehr veränderliche Grössen von einander abhängen. Alles hängt hiebey von richtiger Anwendung der sonst so sehr leicht zu übersehenden Regeln der Buchstaben Rechnung ab. Vielleicht hat H. Lambert (a. a. O. M. s. oben den 1. §.) fehlsame Anwendungen dieser Regeln im Sinne gehabt, wenn er an H. v. Davisson schreibet, die Lehre von den verneinten Grössen sey noch nicht völlig zur Richtigkeit gebracht, und die Vorstellung welche sich H. Kühn vormahls von den unmöglichen Wurzelgrössen machte, ist allerdings ein merkwürdiges Beyspiel davon. Es ist aber

auch

auch nicht das einzige, was ich kenne, und in so fern könnte H. Lambert wohl Recht haben, wenn er noch im Jahr 1773 schreibt, die Lehre von den verneinten Grössen sey noch nicht zur völligen Richtigkeit gebracht. Wenn ich also noch einige dahin gehörige Bemerkungen folgen lasse; so möchten sie wohl noch nicht ganz überflüssig seyn.

40. §.

Die Grundbegriffe von positiven und negativen Grössen, und die Rechnungsregeln, wie man damit umgehen muß, sind vermittelst der Abstraction aus solchen Fällen gefunden, wobey man allemahl nur an grade Linien gedacht hat. Nach Cartesens Geometrie, worauf unsre ganze neuere Geometrie der krummen Linien gegründet ist, stellet jede algebraische Formul eine grade Linie vor, (23. §.) und doch ist das gesuchte oft ein Winkel, eine Fläche, ein körperlicher Raum. Die Formuln, welche das gesuchte ausdrücken, findet man oft negativ: also ist beym algebraischen Vortrage der Geometrie auch oft die Rede vom negativen Winkel, von einer negativen Fläche, oder einem negativen körperlichen Raum. Mit dem allen hat es in der Hauptsache seine vollkommen gute Richtigkeit: nur in der Anwendung auf besondre Fälle kann man es leicht versehen, wenn man nicht auf die Gründe Rücksicht nimmt, wovon eigentlich alle algebraische Operationen abhängen. Der Begriff, welchen man sich überhaupt und im allgemeinen von einer veränderlichen oder unbestimmten Grösse macht, wenn man sie mit z, y, x, bezeichnet und alsdenn in Rechnung bringt, läßt überhaupt zu, daß eine solche Grösse alle mögliche positive und negative Werthe haben könne; die Null, als die Gränze zwischen beyden, nicht ausgeschlossen. Allein das Gesetz, nach welchem eine solche Grösse von der andern abhängen soll, wie wenn y als eine Function von x betrachtet wird, kann vielleicht sehr viele an sich mögliche

Wer-

Werthe für y ausschliessen, wenn gleich für x jeder an sich mögliche Werth angenommen werden kann. Die leicht zu übersehende Gleichung für die Parabel $y = \frac{1}{2} n x x$, wenn n eine Zahl und der Parameter $= \frac{2}{n}$. 1 ist, giebt davon schon ein bekanntes Beyspiel ab: sie zeigt, daß y allemahl an einer Seite der Abscissenlinie bleibe, man mag die Abscissen positiv oder negativ nehmen. Wenn y die Applicate einer krummen Linie vorstellet, so befremdet das eben nicht; wir sind es viel zu sehr gewohnt, uns krumme Linien von allerley Figuren vorzustellen, also auch solche, die ganz an einer Seite der Abscissenlinie liegen. Wenn dagegen das y eine mit der Abscisse x zusammengehörige Fläche bezeichnet, so wie man sie vermittelst der Integralrechnung findet; so kann es das Ansehen haben, als wenn die Rechnung mit der Natur der Sache nicht übereinstimmte, wenn man sich nicht daran erinnert, daß eine solche Integralformul ebenfalls eine Linie keine Fläche bezeichnet, eine Linie nemlich, die sich zum längenmaasse verhält, wie die gesuchte Fläche zum gleichnahmigen Quadratmaaß.

41. §.

Zwischen den positiven und negativen Werthen einer veränderlichen Grösse muß es eine Gränze geben, und wenn y eine veränderliche Linie bezeichnet, so ist zwar allemahl ein Punct die Gränze: der Ort dieses Puncts aber kann unbestimmt seyn, wenn nemlich nicht die Stelle, sondern nur die Lage der graden Linie gegeben ist, worauf man die positiven und negativen Werthe y nehmen soll. Bey Anwendung dieser Lehren auf die Theorie von krummen Linien giebt es Fälle beyder Art. Der Anfangspunct der Abscissen ist die Gränze für die positiven und negativen Abscissen, und der Ort dieses Puncts ist bestimmt gegeben, sobald alle Coefficienten der Gleichung gegeben sind,

weil

weil auch die Stelle der Abscissenlinie als gegeben angenommen wird. Wenn dagegen y eine gradlinichte Applicate bezeichnet, welche gegen die Abscisse unter einen beständigen Winkel geneigt seyn soll; so ist zwar ihre lage aber nicht ihre Stelle gegeben. Sie hat für jede andre Abscisse eine andre Stelle, und die Abscissenlinie ist der unbestimmte Ort der Gränze zwischen den positiven und negativen Applicaten. Was sich an der einen Seite dieser Gränze befindet, das muß mit dem, was an der andern Seite befindlich ist, ein zusammenhängendes Ganzes ausmachen. So lange nur von einer veränderlichen graden Linie die Rede ist, so lange findet man dabey keinen Anstoß. Die Gränze, wo die positiven Werthe anfangen sollen, mag in der graden Linie wo man will befindlich seyn, allemahl kann die grade Linie auch über diese Gränze hinaus nach der andern Seite hin verlängert werden. Der Anfangspunct der Abscisse hat immer einerley Stelle, so lange man die Gleichung für die krumme Linie nicht ändert: und wenn gleich der Anfangspunct der Applicate nicht immer einerley Stelle hat, so liegt er doch gewiß in der Abscissenlinie.

42. §.

Bey einer solchen graden Linie kommt überdem nur die ganz einfache Ausdehnung nach der Länge in Betrachtung: mit einer Fläche und mit körperlichen Räumen hat es dagegen eine ganz andre Bewandniß. Schon auf einer Ebene giebt es um jeden Punct herum unzählig viele verschiedene Richtungen wohin sich ihre Ausdehnung erstreckt, und die Ausdehnung des körperlichen Raums erstreckt sich um jeden Punct nach allen Seiten. Wenn wir einer Ebene eine zwiefache Ausdehnung nach der Länge und Breite, dem körperlichen Raum eine dreyfache Ausdehnung nach der Länge, Breite und Dicke oder Höhe zuschreiben; so ist das nur ein Hülfsmittel für die

Rech-

Rechnung. Länge und Breite sind nur zweyerley Richtungen, Länge, Breite und Dicke, dreyerley Richtungen, nach welchen wir uns die Ausdehnung einer Ebene oder eines Körpers vorstellen. Bey Anwendung der Integralformul $\int y dx$ setzen wir voraus, die zu quadrirende Fläche erstrecke sich längst der Abscissenlinie fort, wir denken dabey nur an ihre Ausdehnung in die Länge nach der Richtung der Abscissenlinie vorwärts und rückwärts: allein die Ausdehnung der Fläche ändert sich auch in der Richtung der Ordinate, und das Gesetz nach welchem diese Aenderung erfolgt, liegt mit in der Integralformul. Man weiß, daß die Formul $\int y dx$ voraussetze, es müsse eine Gleichung zwischen rechtwinklichten Coordinaten x, y, bekannt seyn, und diese Voraussetzung genüget hier, weil alles folgende leicht auf den Fall, wenn der Coordinatenwinkel ein schiefer Winkel ist, angewandt werden kann. Was man nun eigentlich sucht, das ist die Grösse der Fläche zwischen der Abscisse, den beyden Applicaten im Anfangs- und Endpunct der Abscisse, und dem dazwischen liegenden Bogen. Es kommt indessen darauf an, was für eine Bedingung man bey Zusetzung der beständigen Grösse zum Grunde legen will: soll $\int y dx = 0$ seyn für $x = a$, oder $x = -a$, so liegt die quadrirte Fläche zwischen der Applicate, die vom Anfangspunct der Abscissen um die Distanz $+a$ oder $-a$ entfernt ist, und der Applicate im Endpunct der Abscisse. Die erste Applicate mag nun im Anfangspunct der Abscisse selbst, oder in einem andern um den Abstand a davon entfernten Punct angenommen seyn: so scheint es, daß sie nicht allein selbst, sondern auch ihre Stelle als unveränderlich angesehen werden müsse. Es scheint auch als wenn eben diese unveränderliche Applicate die Gränze des positiven und negativen Theils der quadrirten Fläche sey, wenn sich diese von jener Applicate aus nach beyden Seiten erstreckt.. Ist es also die Applicate im Anfangspunct der Abscissen, so scheint es,

daß

daß mit entgegen gesetzten Abscissen auch allemahl entgegen gesetzte Flächenräume zusammen gehören müssen.

43. §.

Hiemit stimmen aber die Resultate der Rechnung schon nicht überein, wenn man auch nur auf die bekanntesten und leichtesten Fälle die Anwendung macht. Die Linie MN sey grade, und werde von der Abscissenlinie BC unter einem Winkel CAM geschnitten, dessen Tangente $= n$ ist. Man setzte $AP = x$, $PM = y$, so ist $y = nx$, $ydx = nxdx$, und $\int ydx = \frac{1}{2}nx^2 + C$. Wenn nun $\int ydx$ mit x zugleich verschwinden soll, so hat man $\int ydx = \frac{1}{2}nx^2$, und diese Formul bleibt positiv, wenn auch x negativ genommen wird. Sie zeigt nur an, daß zwischen gleich grossen einander entgegengesetzten Abscissen, den Applicaten durch die Endpuncte, und den dazu gehörigen Abschnitten der graden Linie MN, gleiche Flächen enthalten sind. Wenn man überlegt, was das xx in der Formul eigentlich vorstellet, so nimmt man auch leicht wahr, daß die Formul nichts weiter als die Grösse der gesuchten Fläche in dem oben (21. §.) festgesetzten Sinne anzeigen könne. Wenn nemlich $AG = 1$, und das Quadrat $AGHI = Q$ gesetzt wird, so ist eigentlich $\int ydx = \frac{1}{2}n$. $\frac{x}{AG}$. $\frac{x}{AG}$. Q. Nimmt man $AD = AG = 1$, $AE = AP = x$, so giebt die aus dem 18. §. schon bekannte Verzeichnung $AQ = \frac{xx}{AG}$, und wenn auch AE nach AF, AP nach AR gelegt wird. Die Zahl $\frac{xx}{AG} : AG = \frac{AQ}{AG}$ zeigt nun an, wie vielmahl das über AP verzeichnete Quadrat APKL grösser als AGHI sey, und die Zahl $\frac{1}{2}n$ giebt das Verhältniß der Fläche APM gegen das Quadrat APKL an.

36. Fig.

an. Daß die eben so grosse Fläche ARN, welche mit der negativen Abscisse AR zusammen gehört, unter der Abscissenlinie befindlich sey, wird schon durch die Gleichung zwischen den Coordinaten x und y angezeiget, weil diese für negative x auch negative y giebt.

44. §.

37. Fig. Man nehme einen andern Anfangspunct der Abscissen in D, setzte $AD = a$, $DP = x$, $PM = y$, so ist nun $y = n(a + x)$, und $\int y dx = nax + \frac{1}{2}nxx = EDPM$, wofern $\int y dx$ mit x zugleich verschwinden soll. Für negative x wie DQ wird nun $EDQN = -nax + \frac{1}{2}nxx$ negativ: denn $x < a$ giebt $nxx < nax$. Indessen wächst dieser negative Werth nur so lange als $x < a$ bleibt. Für $x = a$ hat man $\int y dx = -\frac{1}{2}naa = DAE$. Für grössere negative x, wie DR, nimmt das negative Integral wieder ab, wie man gleich siehet, wenn man $a + z$ anstatt x setzet, da dann $-naa - naz + \frac{1}{2}naa + naz + \frac{1}{2}nzz = -\frac{1}{2}naa + \frac{1}{2}nzz$ gefunden wird: demnach kann das Integral die Fläche zwischen DE und RS nicht ausdrücken. Dieses wäre die arithmetische Summe $ADE + ARS$ und das Integral giebt die arithmetische Differenz $ADE - ARS$. Wird $x = DF = 2a$, oder $z = AF = a$, so wird aufs neue $\int y dx = 0$, und daraus erhellet, daß mit der Abscisse DR die Fläche FRSG zusammen gehöre. Für noch grössere negative x wird $\int y dx$ wieder positiv, es gehört nun mit der Abscisse DT die Fläche FGVT zusammen.

45. §.

37. Fig. Es bleibe, wie im vor. §. $FA = a$ und man setze $FP = x$, so hat man $y = n(x - a)$ und das giebt $\int y dx = \frac{1}{2}nxx - nax = FRSG$, wiederum mit der Voraussetzung, daß $\int y dx = 0$ werden soll, wenn $x = 0$ wird. Nach dieser Formul ist für positive x das Integral $\int y dx$ anfangs negativ, so lange $x < a$ bleibt, und es wird

=

$= -\frac{1}{2}naa = FAG$ für $x = a = FA$. Der negative Werth nimmt wieder ab, wenn $x > a$ wird, wie man am besten übersiehet, wenn man $AQ = z$, also nun $a + z$ anstatt x setzet: denn man erhält $\int ydx = \frac{1}{2}naa + naz + \frac{1}{2}nzz - naa - naz = -\frac{1}{2}naa + \frac{1}{2}nzz$. Demnach kann das Integral wiederum die Fläche zwischen FG und QN nicht ausdrücken, weil diese die arithmetische Summe der Dreyecke AFG, AQN wäre, da doch das Integral ihre arithmetische Differenz angiebt. Jene Summe würde auch mit FQ wachsen, wogegen $\int ydx$ abnimmt, so lange $x < 2a$, oder $z < a$ bleibt: demnach kann keine andre Fläche als DENQ gemeint seyn. Eben diese Fläche verschwindet, wenn $x = 2a$ oder $z = a$ ist, und wird positiv, wenn $x > 2a$ wird, und Q über D hinaus in P fällt, da dann das Integral $\int ydx$ die Fläche DPME giebt.

46. §.

Aus diesem ganz leicht zu übersehenden Beyspiele erhellet es schon, daß die allgemeine an sich ganz unbestimmte Integralformul $\int ydx$, wenn gleich bey der Zusetzung der beständigen Grösse nach den bekannten Regeln ein Werth der Abscisse x bestimmt ist, womit $\int ydx = 0$ zusammen gehören soll, auch noch für andre Abscissen den Werth $= 0$ geben könne. In allen den Fällen, wenn das noch ganz unbestimmte Integral $\int ydx$ als eine rationale ganze Function von x ausgedrückt werden kann, läßt es sich in mehrere einfache Factoren zerlegen, die vielleicht alle möglich seyn können. Jeder dieser einfachen Factoren $= 0$ gesetzt giebt alsdenn einen eigenen bestimmten Werth der Abscisse x womit $\int xdx = 0$ zusammen gehört. Diese Bewandniß hat es schon mit der im 44. §. betrachteten Formul $\int ydx = nax + \frac{1}{2}nxx$, sie verschwindet für sich schon mit x, weil x ein Factor ist: aber auch $a + \frac{1}{2}x$ ist ein Factor, also muß sie aufs neue verschwinden, wenn $x = -2a$ wird. In dem Fall $x = 0$ geht diese Formul

vom positiven zum negativen über, indem $+x$ durch die Gränze 0 in $-x$ übergehet, sie wächst anfangs als negative Grösse, und nimmt nachher wieder ab: also muß sie für einen gewissen Werth $-x$ den grösten negativen Werth erreichen, welches hier, wie man sehr leicht übersiehet, $x=-a$ ist. In dem Fall $x=-2a$ gehet $\int ydx$ vom negativen wieder zum positiven über, und der positive Werth bleibt, wenn gleich die negative Abscisse nun über jede Gränze wächst. Mit der Formul $\int ydx=\frac{1}{2}nxx-nax$ (45. §.) hat es eine ähnliche Bewandniß. Mit den Abscissen $-x$ gehören positive Werthe $\int ydx$ zusammen. Wenn aber $-x$ durch 0 in $+x$ übergehet, so gehen zugleich die Werthe $\int ydx$ in negative über, wachsen aber nur so lange bis $x=+a$ wird, da dann $\int ydx$ den grösten negativen Werth erhält. Für grössere x nehmen die negativen Werthe $\int ydx$ wieder ab, bis mit $x=+2a$ das Integral $\int ydx$ aufs neue Null wird, und für grössere positive x beständig positiv wächst.

47. §.

Man weiß, daß eine Gleichung wie $z=\int ydx$, eben darum, weil das z eigentlich eine von x abhängende veränderliche grade Linie vorstellet, die Natur einer krummen Linie zwischen den Coordinaten x und z ausdrücke. Weil die Applicaten z dieser krummen Linie sich wie die mit denselben Abscissen x zusammen gehörigen Flächen der Linie verhalten, wozu die Coordinaten x und y gehören; so gehört jene als die quadrirende Linie mit dieser zusammen. Die Quadratrix der graden Linie, deren Natur die Gleichung $y=nx$ ausdrückt, ist die Apollonianische Parabel, wozu die Gleichung $z=\frac{1}{2}nxx$ gehört. Es sey
38. Fig. NAM diese Parabel, so stellen PM (38. Fig.) die Dreyecke APM (36. Fig.) und die Applicaten BN (38. Fig.) die Dreyecke ARN (36. Fig.) vor. Ist $y=n(a+x)$ die Gleichung für die grade Linie, so ist $z=nax+\frac{1}{2}nxx$ die

Glei-

Gleichung für die quadrirende Parabel. (44. §.) Die Abscissenlinie FH ist nun mit der vorigen BC in der Entfernung $AK = \frac{1}{2}naa$ parallel, GH, GW, sind die Abscissen, womit die Applicaten HM, WX, zusammen gehören. Wenn $y = n(x - a)$ die Gleichung für die grade Linie ist, so hat man $z = \frac{1}{2}nxx - nax$ für die quadrirende Parabel, (45. §.) ihre Abscissenlinie ist noch FH, aber L ist nun der Anfangspunct, LH, LW, sind die Abscissen, womit die Applicaten HM, WX, zusammen gehören. Hier verursachet es gar keinen Anstoß, daß die negativen Applicaten QS bis auf den grösten Werth KA wachsen, nachher wieder abnehmen, bey L aber durch die Gränze o vom negativen zum positiven wieder übergehen. Ihr Anfangspunct liegt immer in FH, er ist immer mit dem Endpunct der Abscisse einerley, und es ist gleichviel, ob wir den Endpunct oben über FH, oder unter FH suchen müssen. Die quadrirte Fläche aber soll sich allemahl an der Applicate im Endpunct der Abscisse endigen; sie kann also nicht immer bey einer und eben derselben unveränderlichen Applicate anfangen, wofern mit der wachsenden Abscisse bald wachsende bald wieder abnehmende Werthe des Integrals zusammen gehören.

48. §.

Eine solche Integralformul, wie $\int ydx$, ist die Gränze einer veränderlichen Summe einer Reihe in der zu quadrirenden Fläche beschriebene Rechtecke, wovon ein jedes unbestimmt durch ydx ausgedrückt wird. Beym quadriren, wenn man die Grösse der ganzen Fläche haben will, welche sich von der ersten Applicate längst der Abseissenlinie fort bis zur letzten Applicate erstreckt, muß man die arithmetische Summe aller Rechtecke ydx suchen: die Integralformul aber kann nur die algebraische Summe dieser Rechtecke angeben. Weil nemlich der unbestimmte Werth y aus der Gleichung zwischen x und y gebraucht

wird, so kann für positive Werthe x die Applicate y negativ seyn, wenn auch dx als Increment, mithin positiv in Rechnung kommt: nun muß die Summe $\int -ydx$ negativ gefunden werden. Eben das ist der Fall, wenn y für abnehmende x positiv bleibt: denn nun ist dx ein Decrement, welches negativ in Rechnung kömmt, und die Summe $\int -ydx$ wird ebenfalls negativ. Wenn aber mit abnehmenden x, oder mit negativ wachsenden x, also negativen dx, auch negative y zusammen gehören; so ist ydx mithin auch $\int ydx$ positiv. Die positiven und negativen Theile der Summe, wenn man längst der Abscissenlinie fort summirt, vermindern einander: also wird es vollkommen einleuchtend, daß die Summe $\int ydx$ wachsen und abnehmen, gröste und kleinste Werthe haben, vom positiven zum negativen und umgekehrt übergehen könne. Wenn für einen gewissen Werth x die Summe $\int ydx$ positiv ist, und bey fernerer Aenderung der Abscisse x das Rechteck ydx negativ wird; so muß nun das, was bis dahin in die Summe gekommen war, abzunehmen anfangen, die Summe $\int ydx$ kann nur mit x wachsen, so lange als ydx positiv bleibt: auch verhält es sich umgekehrt eben so. Wenn für negative x die Summe $\int ydx$ negativ ist; so kann sie nur so lange negativ wachsen, als ydx negativ bleibt: sie muß anfangen wieder abzunehmen, wenn ydx positiv wird. Gehört also mit $x = 0$ vielleicht $\int ydx = 0$ zusammen; so folgt es nicht, daß mit dem positiven oder negativen x auch ein positives oder negatives Integral $\int ydx$ zusammen gehören müsse: es kommt darauf an, was ydx für ein Zeichen erhalten müsse.

49. §.

Aus der zwischen x und y gegebenen Gleichung weiß man allemahl mit welchen Werthen der Abscisse x negative Werthe der Applicate y zusammen gehören. Kann vielleicht y gar nicht negativ werden, so giebt es auch nur

eine

eine Gränze zwischen den positiven uud negativen Werthen des Integrals $\int ydx$. Wenn die grade Linie HM mit der Abscissenlinie CB in der Entfernung $AK = a$ parallel ist; so hat man $y = a$, $\int ydx = ax$, wenn $x = 0$ auch $\int ydx = 0$ geben soll. Nachdem nun x positiv oder negativ ist, nachdem ist es auch $\int ydx$. Für die Parabel NAM, (38. Fig.) wenn $AP = x$, $PM = y$ war, hatte man $y = \frac{1}{2}nx^2$, also wird $\int ydx = \frac{1}{6}nx^3$, unter der vorigen Voraussetzung, daß $\int ydx = 0$ werden soll, wenn $x = 0$ ist: auch dieses Integral wird mit x zugleich positiv oder negativ. Will man, daß $\int ydx = 0$ seyn soll, wenn $x = b$ ist, so giebt das Const. $= -\frac{1}{6}nb^3$, und $\int ydx = \frac{1}{6}n(x^3 - b^3)$. Nimmt man $AD = b$, so ist nun DE die erste Applicate. Für $x > b$ ist DPME positiv, für $x < b$ wird sogleich auch $\int ydx$ negativ, und bleibt es, wenn auch x negativ wird. Das Integral $\int ydx = -\frac{1}{6}n(x^3 + b^3)$ giebt nun die ganze Fläche von DE bis BN. 37. Fig. 38. Fig.

50. §.

Man setze $AC = a$, den Winkel $ACM = \varphi$, $CM = z$, so ist $FM = y = z \sin. \varphi$, und $AP = x = a - z \cos. \varphi$: diese Werthe in die Gleichung $y = nx$ gesetzt geben $z \sin. \varphi = na - nz \cos. \varphi$, und daraus erhält man $z = \frac{na}{\sin. \varphi + n \cos. \varphi}$, oder $z = \frac{na \sec \varphi}{n + \text{tang.} \varphi}$. Ferner findet man $\frac{1}{2}zzd\varphi = \frac{\frac{1}{2}n^2a^2 \sec.\varphi^2 . d\varphi}{(n + \text{tg}\varphi)^2}$, oder $\frac{1}{2}zzd\varphi = \frac{\frac{1}{2}n^2a^2 . d\text{tg}\varphi}{(n + \text{tang.}\varphi)^2}$, und das giebt $\int \frac{1}{2}zzd\varphi = C - \frac{\frac{1}{2}n^2a^2}{n + \text{tg}\varphi}$. Soll dieses Integral mit dem Winkel φ verschwinden, so muß $C = \frac{1}{2}na^2$ genommen werden, und es 36. Fig.

ist die unbestimmte Ebene $ACM = \frac{1}{2}na^2 - \frac{\frac{1}{2}n^2a^2}{n + tg\varphi} =$

$\frac{\frac{1}{2}na^2tg\varphi}{n + tg\varphi}$. In dieser Formul ist $n =$ tang. CAM, sie ist für positive Winkel φ positiv, und bleibt positiv, auch wenn $\varphi > 90°$, also tang. φ negativ ist, so lange $tg\varphi > n$ bleibt, oder $tg\varphi >$ tang. CAM. Wird ACM oder $\varphi = 180° -$ CAM, so hat man tang. $\varphi = -n$, und die Formul giebt für ACM die Gränze ∞. Für negative Winkel φ wird die Formul $\frac{\frac{1}{2}na^2tg\varphi}{n + tg\varphi}$ negativ, und bleibt negativ, so lange $tg\varphi < n$, oder ACN < CAM bleibt: für ACN = CAM ergiebt sich wiederum die Gränze ∞. Ausser diesen beyden äussersten Gränzen giebt es weiter keine gröste oder kleinste Werthe für ACM: auch kann das Differential $\frac{1}{2}zzd\varphi$ nur negativ seyn, wenn es $d\varphi$ ist. Hier ist also CA die eigentliche Gränze zwischen dem positiven und negativen der quadrirten Fläche.

51. §.

57. Bild. Wenn die Abscissenlinie BC von KO im Anfangspunct A unter dem gegebenen Coordinatenwinkel, hier also senkrecht geschnitten wird, und KO Axe der Applicaten heißt; so stellen AC, AB, die Richtungen der positiven und negativen Abscissen, AK, AO, die Richtungen der positiven und negativen Applicaten vor. Man kann sie überdem auch als Gränzen positiver und negativer Flächen ansehen: das Rechteck KAZY ist dem Rechteck KAWL in der Richtung der Abscissenlinie, auch ist AWXO demselben Rechteck KAWL in der Richtung der Axe der Applicaten entgegen gesetzt. Weiter muß man das aber nicht treiben, als es bey algebraischen Rechnungen nöthig ist, die Producte der Linien KA und AZ, AW und AO, die alsdenn selbst Linien keine Flächen sind, als solche zu betrach-

betrachten, die dem Product AK × AW entgegen gesetzt sind. Eben diesen algebraischen Rechnungsregeln gemäß kann man sagen, das Rechteck AOIZ sey wieder positiv, weil die linie AO × AZ von AK × AW weder der Grösse noch der Richtung nach verschieden ist: weiter aber muß man das nicht ausdehnen. Es bleibt AOIZ dem Rechteck KAZY in der Richtung der Applicate so gut entgegen gesetzt, als AWXO dem Rechteck AWLK. Summen solcher Rechtecke die unter AB zur linken zu AO fallen, giebt die Integralformul $\int ydx$ positiv, wenn AB, AO, die Richtungen der negativen Abscissen und Applicaten vorstellen. Der Grund davon ist der, weil selbst ydx nichts anders als das Differential einer linie ist, welches in allen den Fällen als Increment in der Rechnung vorkommt, wenn y und dx beyde positiv oder beyde negativ sind, als Decrement aber, wenn dx allein, oder dy allein negativ ist.

52. §.

Eine Gleichung zwischen einem veränderlichen Winkel und der damit zusammen gehörigen Entfernung eines jeden unbestimmten Punets einer krummen linie von der Spitze des Winkels, hat in mehr als einer Absicht Vorzüge vor der Gleichung zwischen zweyen gradlinichten Coordinaten für eben die krummen linie, wie davon besonders die Anwendungen auf transcendente linien Beyspiele geben. Die Integralformul $\int \frac{1}{2} zz d\varphi$ (50. §.) begreift die Aenderungen der Ausdehnung der zu quadrirenden Figur nach allen von der Spitze des veränderlichen Winkels fortlaufenden Richtungen, und die Fläche, welche quadrirt werden soll, ändert sich mit dem Winkel allemahl auf eine übereinstimmige Art; sie wächst, wenn der Winkel wächst, und nimmt auch mit dem Winkel zugleich ab. Eben darum findet der oben im 6. u. ff. §§. festgesetzte Begriff von entgegen gesetzten Grössen im eigentlichsten Sinne seine Anwendung. Der mit dem

Halbmesser Eins zwischen den Schenkeln des veränderlichen Winkels beschriebene Bogen hat seinen Anfangspunct im Punct V, da wo er den unveränderlichen Schenkel CA schneidet. Von V aus erstreckt sich dieser Bogen entweder nach der einen oder nach der andern Seite von CA angerechnet um C herum, und eben das kann man von der Fläche sagen, die zwischen beyden Schenkeln des Winkels und dem damit zusammengehörigen Bogen der quadrirten Linie liegt. Uebrigens muß man es nie vergessen, daß die Zeichen + und (—) nur Hülfsmittel der Rechnung sind, daß das negative nicht die Sache sondern nur den Ausdruck angehe, und daß die ganze Idee vom positiven und negativen aufhöre, sobald die Rechnung geendiget ist. Das Zeichen + oder (—) vor dem letzten Resultat bey Auflösung einer geometrischen Aufgabe weiset nur nach, an welcher Seite der Gränze zwischen zweyen Grössen, deren Ausdehnung bey dieser Gränze anfängt, man das Resultat suchen müsse.

53. §.

Wenn man nun alles bisher vorgetragene im ganzen Zusammenhange überdenkt, und besonders auf den Umstand Rücksicht nimmt, daß man die Begriffe vom positiven und negativen von solchen Fällen abstrahirt hat, in welchen von Zahlen die Rede ist, die beym vorwärts und rückwärts Zählen auf entgegen gesetzte Art wachsen, oder von graden Linien, die sich von einerley Punct aus nach entgegen gesetzten Richtungen erstrecken; (7 u. f. §§.) so erhellet, daß man bey der Anwendung dieser Begriffe auf Flächen an keine bestimmte Figur der Fläche denken müsse. Von einer negativen Quadratfläche von einer negativen Kreisfläche kann eigentlich nie die Rede seyn. Das Ganze kann seine bestimmte Figur haben, es kann vielleicht unbegränzt seyn: allemahl kann man es in Gedanken theilen, man kann sich eine gemeinschaftliche Gränze zwi-

zwischen beyden Theilen vorstellen, und nun für das, was an der einen Seite dieser Gränze liegt, eine allgemeine Formul suchen, die zugleich das, was an der andern Seite dieser Gränze liegt, mit unter sich begreift, so weit als es der Natur der Sache, und den Voraussetzungen gemäß ist, worauf man die Rechnung gebauet hat. Die Grösse oder länge der Zeit ist so wie die länge der graden linie im allgemeinen betrachtet unbestimmt. Jede Epoche theilt die Zeit in zwey ebenfalls noch unbestimmte Zeitläufe; Jahre, Monathe, Tage beyder Zeitläufe kann man aber nun schon von der Epoche vorwärts und rückwärts zählen. Eben so theilt jeder Punct die grade linie in zwey noch unbestimmte Theile; Ruthen, Fusse, Zolle dieser Theile aber kann man vom gemeinschaftlichen Gränzpunct vorwärts oder rückwärts fortzählen. Zwey bekannte Epochen bestimmen den Zeitlauf zwischen beyden völlig, so wie zwey Puncte auf einer graden linie die Entfernung zwischen beyden. Die Zeit läuft nicht etwa auch seitwärts, so wie sich die grade linie ebenfalls nicht seitwärts ausdehnt: also können hier schon der Natur der Sache nach die Zeichen + und (—) nichts seitwärts laufendes anzeigen, was das eine anzeigt, ist dem, was das andre anzeigt, contradictorie entgegen gesetzt.

54. §.

Zwischen zweyen Epochen A und B, sey ein Zeitlauf $= a$ verflossen, und ein Zeitlauf $= x$ zwischen der frühern Epoche A und einer sonst zu einer andern Zeit vorgefallenen Begebenheit C: der Zeitlauf zwischen der spätern Epoche B und eben der Begebenheit C sey $= y$. Soll man nun eine Gleichung zwischen a, x, y, finden; so müste man zwar noch wissen, ob die Begebenheit C vor oder nach der Epoche A falle. Weil aber der eigentliche Zeitpunct für die Begebenheit C nicht bestimmt ist, und die Aufgabe in ihrer ganzen Allgemeinheit genommen

in eine Gleichung gebracht werden soll; so kann man vorausseßen, C falle zwischen A und B, und das giebt x + y = a, also y = a — x. Fällt nun C später als A, so behält x das hier schon voranstehende Zeichen, und y bleibt positiv, wen x < a ist: das will sagen C fällt früher als B. Wenn dagegen x > a ist, so findet man y negativ; das heißt C fällt später als B. Wäre aber von einer Begebenheit C die Rede, die x Jahre vor der Epoche A vorgefallen wäre, so müste x das entgegen gesetzte Zeichen haben, und man hätte y = a + x. Man mag nun y positiv oder negativ finden, das Zeichen + oder (—) hat allemahl seine Beziehung auf die Epoche B, und y bedeutet eine Zahl von Jahren, die von der Epoche B rückwärts oder vorwärts gezählt werden muß: ein drittes kann es gar nicht geben. Wenn A und B zwey auf einer graden Linie gegebene Puncte sind, und C ein noch unbestimmter Punct auf eben derselben graden Linie ist; so sind x, y, seine unbestimmten Entfernungen von A und B. Die Gleichung x + y = a, woraus y = a — x folgt, dient nun eben so aus jeder Entfernung x die dazu gehörige y zu finden. Die Ruthen oder Fusse, welche die Länge dieser Entfernung y ausmachen, werden von B nach A gezählt, wenn y mit dem Zeichen + gefunden wird, und nach der entgegen gesetzten Richtung, wenn y das Zeichen (—) erhält.

55. §.

Hiemit vergleiche man die im 51. §. schon vorgekommenen Bemerkungen, so übersiehet man aufs vollkommenste, wie weit und in welchem Sinne man eine und eben dieselbe algebraische Rechnung, wobey die Zeichen + und (—) in Betrachtung kommen sollen, auf vier solche
37. Fig. Rechtecke, wie AWKL, KAZY, AOXW, AOIZ, zugleich ausdehnen könne. Die Rede ist entweder von einer Fläche, welche sich längst der Abscissenlinie erstreckt,

und

und alsdenn sind nur Rechtecke, wie AKLW, AZYK, einander entgegen gesetzt: oder es ist die Rede von einer Fläche, welche sich längst der Axe der Applicaten der Länge nach ausdehnt und nun sind AKLW, AWXO, oder AKYZ, AOIZ, entgegen gesetzte Rechtecke. Hat also AKYZ das Zeichen (—), so erhält AOIZ das Zeichen +: denn was dem negativen entgegen gesetzt ist, erhält bey algebraischen Rechnungen das dem (—) entgegen gesetzte Zeichen. Aus eben dem Grunde muß AOIZ das Zeichen + erhalten, wenn es dem AWXO mit — bezeichnet entgegen gesetzt wird. Für die Parabel NAM, wenn TH die Abscissenlinie und G der Anfangspunct, GH = x, HM = y ist, hat man $y = nax + \frac{1}{2}nxx$, (47. §.) also $\int ydx = \frac{1}{2}nax^2 + \frac{1}{6}nx^3$. Dieses Integral giebt GHM, so lange y und dx beyde positiv sind, es verschwindet für x = o, giebt aber noch was positives, wenn GO = — x, genommen wird, so lange GO < 3a bleibt, nemlich $GOS = \frac{1}{2}nax^2 - \frac{1}{6}nx^3 = \frac{1}{2}nx^2(a - \frac{1}{3}x)$. Es ist die Gränze der Summe eine Reihe von Rechtecken, die an GT anfängt, wovon jedes unbestimmt durch + ydx ausgedruckt wird. Nimmt man GO = GL = 2a, so wird $\int ydx = \frac{1}{6}na^3$ ein Gröstes. Für noch grössere negative x werden die Rechtecke ydx wieder negativ, weil y positiv wird: doch findet man für negative x, die grösser als GL sind, $\int ydx$ noch positiv, aber dieser noch positive Werth wird nun wieder kleiner, wenn x auch GL zu übertreffen anfängt, so lange bis GF = 3a genommen wird, da dann $\int ydx = o$, und für noch grössere negative Werthe von x wieder negativ wird. Der Grund ist, weil $\int ydx$ die algebraische Summe aller ydx angiebt, die sich bey GT anfangen und sich über LZ hinaus erstrecken. Daher wird die Summe GKLA von der hinzukommenden LWN vermindert, und wenn LFY = GKLA ist, so muß man GKLA — LFY = o finden. Wächst aber das negative x noch über GF hinaus, so wird $\int ydx$ wieder negativ,

38. Fig.

gativ, und bleibt es, es mag nun —x noch weiter so weit man will wachsen. Für die negative Abscisse GW giebt also das Integral $\int y dx$ die Grösse der Fläche FWNY = LFY — LWN = GKLA — LWN.

55. §.

Die Gleichung $z = \int y dx = \frac{1}{2} a x^2 (a + \frac{1}{3} x)$ gehört nun
39. Fig. aufs neue mit der quadrirenden Linie NEAM so zusammen, daß z die gradlinichten Applicaten PM für die Abscissen AP = x vorstellet. Befremden kann es niemanden, daß z vorhin eine Fläche hieß, und nun wieder eine grade Linie seyn soll, der sich daran erinnert, daß es hier auf nichts anders, als nur auf das Verhältniß der Grösse z gegen eine mit ihr gleichartige Grösse ankomme, die man für Eins annimmt. Stellt man sich diese für Eins angenommene Grösse als den Divisor vor, so ist $\frac{z}{1}$ eine Zahl, und es ist im Grunde einerley, ob man sich die algebraischen Grössen als Zahlen, oder als Linien vorstellen will. Ausdruck und Sache stimmen allemahl sehr wohl mit einander überein; 3 Pfunde, 3 Ellen, 3 Thaler, sind einerley Zahl, wenn gleich Pfunde, Ellen, Thaler ungleichartige Grössen sind. Herr Lambert hat sich zwar in der oben im 1. §. angeführten Stelle darüber nicht weiter erklärt, wieweit in der Lehre von den negativen Grössen Ausdruck und Sache noch nicht genau übereinstimmen: ich zweifle aber nicht, daß der bisherige Vortrag ihn völlig würde befriediget haben. Dieserwegen werde ich nur einige Bemerkungen noch folgen lassen, welche die ehemaligen Behauptungen des H. Kühn betreffen, daß man solche Wurzeln aus negativen Grössen, welche nach der gewöhnlichen Lehre unmöglich seyn sollen, (22. §.) vermittelst geometrischer Constructionen darstellen könne. Hierauf beziehet sich das übrige, was H. Lambert a. a. O. von der Wurzelgrösse $\sqrt{-1}$ sagt, weil H. v. Davisson dieser Leh-

re

re des H. Kühn erwehnt und von einem seiner dahin gehörigen schriftlichen Aufsätze Nachrichten verlangt hatte.

57. §.

Nach Vieta und mehrern andern ältern algebraischen Schriftstellern stellen Producte wie a. b, a. b. c, Flächen und körperliche Räume vor, (24. §.) also a^2 eine Quadratfläche, a^3 einen körperlichen Würfel. Bevor man angefangen hatte, auf Cartesens Geometrie, in wie weit darin die Natur krummer Linien durch unbestimmte Gleichungen zwischen zweyen veränderlichen Grössen ausgedrückt wird, weiter zu bauen, war man vornemlich nur mit Auflösung der bestimmten Gleichungen beschäftiget, und suchte sehr mühsam allerley Verfahrungsarten auf, um ihre Wurzeln durch Zahlen auszudrücken, oder durch grade Linien vermittelst geometrischer Constructionen darzustellen. Demnach war $\sqrt{A}$ Seitenlinie eines Quadrats, $\sqrt[3]{A}$ Seitenlinie eines Würfels. Es scheint, daß H. Kühn diese ältern Schriftsteller viel gelesen und sich an ihren Sprachgebrauch sehr gewöhnt habe: denn daraus läßt es sich sehr wohl erklären, wie er auf seinen Vortrag in der Abhandlung: Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis (Novi Comment. Petrop. Tom. III. ad A. 1750 et 1751, pag. 170. sqq.) habe verfallen können. Sein Vortrag hat zwar bey solchen Lesern keinen Beyfall finden können, die von den Gründen, worauf die neuern algebraischen Rechnungen und ihre Anwendungen auf die Geometrie beruhen, sonst schon hinlänglich unterrichtet waren: ich glaube aber, daß es wegen andrer gleich anzuführender Gründe noch nicht ganz überflüssig sey, wenn ich die ersten Grundsätze aus der Kühnschen Schrift mit den nöthigen Bemerkungen darüber hieher setze.

58. §.

58. §.

40. Fig. 1) Es sey PRSQ ein Rechteck, PQ = + a, PR = + b, die Fläche desselben + a. b = α. Man mache Pq = — a, Pr = — b, und zeichne das Rechteck Prsq = γ, so ist auch γ = + a. b, oder nach H. Kühn = + b. a um dieses Rechteck γ von α = + a. b zu unterscheiden. Eben dieses γ ist dem vorigen α in Ansehung der Länge und Breite entgegen gesetzt, es hat negative Länge und Breite. Aus PR und Pq, und eben so aus Pr und PQ verzeichne man noch die Rechtecke PRsq = — a. b = δ, und PQΣr = — b. a = β. Jenes ist dem Rechteck α allein in Ansehung der Länge, dieses in Ansehung der Breite entgegen gesetzt.

2) Man nehme a = b, so erhält man vier Quadrate um P, nemlich α = + a², dessen Seite oder Wurzel (radix areae quadratae) = + a ist, ferner β = Pr. PQ = — a. + a = — a², (das folgende sind die eigenen Worte des H. Kühn) ejusque latus seu radix, cum nec per solam PQ = + a, nec per solam Pr = — a exprimi possit, sed vtriusque dimensiones simul ratio habenda sit, recte exprimitur per √ — PR. PQ seu breuitatis graria per + √ — a². Weiter ist nun γ = — a × — a = + a², und √γ = — a. Mit δ soll es eben die Bewandniß haben, wie mit β, jedoch soll √δ = — √ — a² seyn, weil β und δ nach H. Kühne Meinung einander entgegen gesetzt sind. Ob nun gleich die Seite des Quadrats β, auch eben so die Seite des Quadrats δ, nach H. Kühns eigenem Geständnisse weder durch + a, noch durch — a ausgedrückt werden kann, so soll man doch die Seite eines jeden durch Construction darstellen können, weil man jedes von den vier Quadraten zeichnen kann.

59. §.

Diese Vorstellung der Sache weicht ganz von derjenigen ab, welche ich oben davon vorgetragen habe. H. Kühn ver-

verstehet die Zeichen a^2, $\sqrt{a^2}$ ganz anders, als sie den Grundsätzen der neuern algebraischen Rechnungen gemäß verstanden werden müssen: also ist es kein Wunder, wenn er Sätze darauf bauet, wovon andre neuere Algebraisten nichts wissen. Wenn a^2 keine Quadratfläche sondern eine Linie, oder wenn man will eben so gut eine Zahl vorstellet, und wenn $\sqrt{a^2}$ kein latus areae quadratae sondern zwischen $+1$ und a^2 die mittlere geometrische Proportionallinie, oder mittlere Proportionalzahl ist; so ergiebt sich aus dem 22. §. daß auch $\sqrt{-a^2}$ ganz was anders sey, als was H. Kühn daraus machen wollte. Es ist kein latus areae quadratae, es müste eine Linie, oder eine Zahl seyn, die mit sich selbst algebraisch multiplicirt das Product $-a^2$ gäbe, und eine solche Linie oder Zahl giebt es nach H. Kühn eigenem Geständnisse nicht, wie die im 58. §. n. 2. aus seiner Abhandlung abgeschriebene Stelle beweiset. Uebrigens sind die Quadrate β, δ, dem α nicht als Quadrate, sondern als Fläche, und jedes für sich in einer eigenen Richtung genommen entgegen gesetzt. Daß man so zwey Quadrate wie α und δ neben einander zeichnen könne, und daß auch das eine in Ansehung des andern in einem richtigen algebraischen Sinne negativ heissen könne, wird niemand läugnen. Der unbestimmte Ausdruck für ein Rechteck wie APMT ist ax, (49. §.) dasselbe wird $=+aa$ für $x=+a$ und wenn $AO=-a$ für x genommen wird, so ist $AOST=-a^2$: das heißt, nun ist es ein Quadrat an der andern Seite der Axe der Applicaten, und es wird niemanden, der die Elemente der Buchstabenrechnung richtig inne hat, einfallen können, zu sagen, die Seite des Quadrats AOST sey unmöglich. Ein würklich gezeichnetes Quadrat muß doch wohl eine würklich vorhandene Seite haben. 36. Fig.

60. §.

H. Kühn ist mehrere Jahre Lehrer der Mathematik in Danzig gewesen, und hat ohne Zweifel seinen Zuhörern,

rern, wovon noch viele am Leben seyn können, seine fehlsame Theorie vorgetragen. Selbst denkende Männer haben sie zwar leicht berichtigen können: indessen weiß man sonst aus der Erfahrung, daß man wegen eines sonst wohl gegründeten Vertrauens auf die Einsichten eines Lehrers lange durch Zweifel aufgehalten werden kann, ob es mit dem Vortrage desselben, wenn er auch von dem sonst gewöhnlichen abweichet, nicht seine gute Richtigkeit haben könne. In der Mathematik kann das besonders alsdenn nur gar zu leicht der Fall seyn, wenn man nicht mit Hülfe eines andern mündlichen oder schriftlichen Lehrers dahin geleitet wird, die einmahl unrichtig gefaßten Elementarbegriffe zu berichtigen, worüber man ohnedem häufig zu schnell hinweg eilet. Am meisten ist es zu bedauren, wenn Männer, deren Hauptgeschäfte die Mathematik nicht ist, die sie aber aus Neigung studiren, durch solche unrichtige Vorstellungen aufgehalten werden, die sie einmahl von einem Lehrer, zu welchen sie Vertrauen hatten, angenommen haben. In dem Falle hat sich der Herr Geheime Kriegsrath von Davisson befunden, wie man schon aus einigen Stellen seiner Briefe an H. Lambert (a. a. O. 392. S. schliessen kann. Ich bin nach der Zeit mit einigen Briefen vom Herrn von Davisson beehret worden, unter welchen der oben im 1. §. von mir angeführte beynahe ganz diesen Gegenstand betraf. Damahls habe ich zwar in meiner Antwort über die Hauptsache, worauf alles ankommt, wie ich glaube mich hinlänglich erklärt: weil ich aber eine neue Veranlassung gehabt habe, in dieser Abhandlung die ganze Sache noch vollständiger auseinander zu setzen; so vermuthe ich nicht ohne Grund, daß es dem Herrn von Davisson, und vielleicht mehrern von H. Kühns ehemaligen Schülern angenehm seyn werde, wenn ich hier eine völlig befriedigende Antwort auf die im Jahr 1781. mir vorgelegten Zweifel zu ertheilen versuche. Ich werde die dahin gehörigen Stellen aus dem Briefe des H. v. Davisson

vission mit Häckchen bezeichnet hersetzen, und jedesmahl die nöthigen Erläuterungen beyfügen.

61. §.

Im Eingange des Briefes erzählt H. v. Davisson, daß sein ehemaliger Lehrer ihm alles so vorgetragen habe, wie es in der vorhin angeführten (57. §.) im III Bande der Neuen Petersburgischen Commentarien gedruckten Abhandlung enthalten ist: hiernächst folget der übrige nachstehende Inhalt des Briefes.

„Ich bin aber nachmals überzeuget worden, daß eine unmögliche Grösse am natürlichsten durch eine halbe Ordinate einer krummen Linie zu erklären sey, wovon der Ramus auf der verneinten Seite der Abscisse sich nicht mehr befindet, weil er den Weg nach der bejahenden Seite genommen hat, folglich nicht mehr da seyn kann; und also bin ich von Kühns Meinung in so weit ganz abgegangen.„

1) Die Meinung ist wohl eigentlich diese. Eine unmögliche Grösse sey durch eine Applicate zu erklären, welche den Ast der krummen Linie, wozu sie gehören müste, nicht mehr schneiden kann: denn nicht eben allein mit negativen sondern auch mit positiven Abscissen können unmögliche Applicaten zusammen gehören. Die Gleichung für den Kreis $y^2 = rr - xx$, wenn die Abscissen im Mittelpunct anfangen, giebt $y = \pm\sqrt{(rr - xx)}$ unmöglich, man mag $x = +r+s$ oder $x = -r-s$ anstatt x setzen. In der 35 Figur sey $GC = a$, $AC = r$, $CP = x$, $PM = y$, $GP = z$, so ist $x = z - a$, und dieser Werth in obige Gleichung gesetzt giebt $yy = rr - aa + 2az - zz$. Nun bleibt y nur möglich, so lange z zwischen den Gränzen $a+r$ und $a-r$ bleibt, nicht allein auf der verneinenden Seite sondern auch auf der positiven Seite über B hinaus befindet sich gar kein Ast der krummen Linie. 35. Fig.

2) Wenn gleich die Sache an sich richtig ist, daß bey Anwendung algebraischer Rechnungen auf die Theorie von krummen Linien durch unmögliche Werthe der Applicaten allemahl solche angezeiget werden, die keinen Ast mehr schneiden können; so setzt das doch schon voraus, daß aus den Elementen der Algebra bekannt sey, $\sqrt[2n]{-A}$ (oder überhaupt $\sqrt[2n]{-A} = f + g\sqrt{-1}$) bezeichne etwas unmögliches. Wer also die algebraische Sprache recht verstehen will, der muß vor allen Dingen die Idee fahren lassen, daß $-A$ eine Quadratfläche, und $\sqrt[3]{-A}$ ihre Seite bezeichne. Warum bezeichnet $\sqrt[3]{-A}$ etwas mögliches? warum nicht eben so, wie $\sqrt{-A}$ etwas unmögliches? nicht darum, weil ein negativer Würfel eine mögliche negative Seite hat. Wenn man auch $-a^3$ anstatt $-A$ schreibt; so ist doch $-a^3$ hier kein Würfel, sondern eine grade Linie, oder schlechthin eine Zahl, und es ist

$$+1 : -a : +a^2 : -a^3$$

eine richtige geometr. Progression, die Grösse $-a = \sqrt{-a^3}$ ist die erste von zweyen mittlern algebraisch geometrischen Proportionalgrössen zwischen $+1$ und $-a^3$: aber $\sqrt{-a^2}$ müste zwischen $+1$ und $-a^2$ eine algebraische mittlere Proportionalgrösse seyn, und eine solche giebt es nicht.

Daß eine Wurzelgrösse wie $\sqrt[2n]{-A}$ allemahl auf die Form $f + g\sqrt{-1}$ gebracht werden könne, wird sonst in der Algebra bewiesen, also ist zugleich bewiesen, daß $\sqrt[2n]{-A}$ was unmögliches bezeichne, wenn es ausgemacht ist, daß $\sqrt{-A}$ nichts mögliches bezeichnen könne. Indessen erhellet eben dasselbige auch aus den ersten Elementarsätzen. Es ist $\sqrt[2n]{-A} = \sqrt[n]{\sqrt{-A}}$, und ein Product möglicher Grössen in einander ist allemahl möglich. Wäre also $\sqrt[n]{\sqrt{-A}}$ etwas mögliches, so müste $(\sqrt[n]{\sqrt{-A}})^n =$

$A)^n = \sqrt[2]{-A}$ es auch seyn, wovon das Gegentheil bewiesen ist. Uebrigens müste auch $\sqrt[2n]{-A}$ die erste von $2n-1$ mittlern algebraisch-geometrischen Proportionalgrössen zwischen $+1$ und $-A$ seyn, und eine solche giebt es nicht. Wäre $\sqrt[2n]{-A} = R$, so müste man die Reihe entweder mit den beyden Gliedern

$$+1 \quad +R + \ldots\ldots\ldots$$

oder

$$+1 \quad -R + \ldots\ldots\ldots$$

anfangen: in beyden Fällen aber wäre das mit dem Index $2n$, (das erste Glied nicht mitgezählt) zusammengehörige Glied $+A$ und nicht $-A$, wie es seyn sollte.

62. §.

„Indessen ist mir doch allezeit in Ansehung der vier Quadrate α, β, γ, δ, die um einen Punct C liegen kön- 41.
nen, ein Zweifel übrig geblieben. Es hängt vom Wohl- Fig.
gefallen ab, welche ich von den vier Quadraten bejahend oder positiv annehmen will, Kühn hat α und β bejahend genommen, um aus $+1 \times +1$; $+1^2$; und aus -1×-1; $+1^2$ zu bekommen. Das ist aber arithmetisch und nicht geometrisch; hier ist von Flächen-Maaß die Rede, das sehe ich ein. Wie ich Kühn diesen Einwurf machte, so antwortete er mir:

Wie sich verhält die Seite des kleinen Quadrats, welches der Maaßstab der grössern seyn soll,
(und NB er nahm die unitatem allezeit in α an,)
zu der Seite des grössern Quadrats, so verhält sich
das kleine Quadrat
zum grössern Quadrat,

oder $1 : \sqrt{\beta} = \sqrt{\beta} : \beta$; das ist $1 : -\sqrt{\alpha} = -\sqrt{\alpha} : \alpha$; ($\alpha = \beta$). Dieses ist in Ansehung β: Man weiß, daß man Flächen, ja Körper durch Proportionalzahlen vor-

stellen kann, und so ihre Verhältniß erlangt, und so wollte, glaube ich, sich Kühn wider den Vorwurf schützen: daß er behaupten wolle, eine grade Linie mit einer Linie formirten ein Quadrat.„

Diese Stelle des Briefes war mir anfangs ganz undeutlich, und ich habe sie eben darum, so viel ich mir erinnere, in meiner schriftlich ertheilten Antwort nur kurz oder vielleicht gar nicht berührt. Nachher ist mir beygefallen, daß H. Kühn ohne Zweifel aus dem Vieta: Ad Logisticem speciosam notae priores, die IIIte Proposition in Gedanken gehabt haben müsse, daß nemlich

$$a : b : \frac{bb}{a}$$

also auch $aa : ab : bb$

eine stetige geometrische Proportion sey. Man schreibe

$$aa : ab = ab : bb,$$

so kann man auch $a = 1$ setzen,

und es ist $1^2 : 1 \times b = 1 \times b : bb$,

oder das kleinere für Eins angenommene Quadrat verhält sich zum Rechteck der Seitenlinien des grössern und kleinern Quadrats, wie eben dieses Rechteck zum grössern Quadrat.

Anstatt dessen ist auch

$$a : b = a.b : bb,$$

also wenn $a = 1$ ist,

$$1 : b = 1 \times b : bb,$$

oder: die Seite des kleinern zur Seite des grössern Quadrats, wie das Rechteck beyder Seiten (also nicht das kleine Quadrat, wie vermuthlich wegen eines Schreibfehlers im Briefe stehet) zum grössern Quadrat. Soll nun $bb = \beta$, also $b = \sqrt{\beta}$ seyn, so muß man schreiben

$$1 : \sqrt{\beta} = 1 \times \sqrt{\beta} : \beta;$$

denn beyde mittlere Glieder sind nun nicht einerley: das zweyte ist eine Linie, das dritte eine Fläche. Eben das

stim-

stimmet auch mit dem §. 7. der oben (57. §.) angeführten Kühnschen Abhandlung überein, woselbst der vermeinte geometrische Beweis geführt wird, daß $\sqrt{-a^2}$ nicht unmöglich sey. Es verlohnt sich der Mühe nicht, diesen so genannten Beweis in seiner ganzen ermüdenden Umständlichkeit herzusetzen, weil es lauter ganz bekannte Sätze sind, welche richtig verstanden von niemanden weder bezweifelt noch geläugnet werden. Das Resultat des ganzen Beweises ist: wenn PQ durch die Zahl $+n$ ausgedrückt wird, auch überdem $PR = +n$ gesetzt ist, so muß $Pq = -n$, und $Pr = -n$ seyn, und das giebt $\alpha = +n^2$, $\gamma = +n^2$, $\beta = -n^2$, $\delta = -n^2$. Das lehren uns schon die einfachsten algebraischen Grundregeln. Wenn ferner geschlossen wird: also müsse $\sqrt{-n^2}$ was mögliches seyn, weil δ und β so gut wirkliche Quadrate als α und γ sind, die auch ihre wirklich vor Augen liegenden Seitenlinien haben; so hat wiederum niemand etwas einzuwenden, wenn $\sqrt{-n^2}$ eine von den Seiten Pq oder Pr bedeuten soll. Allein das ist der algebraischen Sprache nicht gemäß, vielmehr bedeutet $\sqrt{-n^2}$ ganz was anders. 40. Fig.

63. §.

Wenn man will, so kann auch n^2 eine Fläche bezeichnen, (21. §.) und eben so $-n^2$. Aber die Grössen $+n^2$ und $-n^2$ sind algebraisch ungleich, man mag sich Zahlen, linien oder Flächen darunter vorstellen, (15. §.) und $-n^2$ ist soviel als $+n^2 \times -1$, also $\sqrt{-n^2} = n\sqrt{-1}$. Das n ist die mögliche Seite des geometrischen Quadrats PRσq oder Pqsr, welche nach H. Kühns Verzeichnung gefunden wird; diese aber wollte man nicht haben, sondern das Product dieser Seite mit $\sqrt{-1}$, und ein solches Product giebt es nicht, weil es zwischen $+1$ und -1 keine mittlere algebraisch-geometrische Proportionalzahl giebt. H. Kühn giebt im 8. §. seiner Abhand-

lung a. a. O. selbst zu, daß die gewöhnlichen algebraischen Beweise davon „es sey $\sqrt{-a^2}$ etwas unmögliches„ völlig bindend seyn würden, wenn man an einerley Punct P nur zwey einander beydes in Ansehung der Länge und Breite einander entgegen gesetzte Quadrate, wie α und γ zeichnen könnte. Weil man aber auch noch zur Seite die Quadrate δ und β zeichnen könne, welche man beyde für negative gelten lassen müsse, und weil diese unstreitig ihre möglichen Seitenlinien hätten, so sey nicht allein $=a^2$ sondern auch $\pm\sqrt{-a^2}$ was mögliches.

Hierauf erwiedere ich, man könne auch allerdings an einerley Punct P nur zwey einander an der Spitze P entgegen gesetzte gleiche grosse algebraische Quadrate zeichnen; denn von algebraischen nicht von geometrischen Quadraten ist hier die Rede. Wenn α und $\gamma = +a^2$, also δ und $\beta = -a^2$ sind, so sind δ und β keinesweges algebraische Quadrate, sondern algebraische Rechtecke. Die Seiten $PR = +a$, $Pq = -a$ sind algebraisch ungleich, (15. §.) also ist $\delta = +a \times -a$ kein algebraisches Quadrat, und eben so wenig ist es $\beta = +a \times -a$, wenn $PQ = +a$, $Pr = -a$ seyn soll: δ und β sind demnach nichts weniger als algebraische Quadrate. So erhellet aufs vollkommenste, daß $\sqrt{+a \times -a}$ was unmögliches sey, denn diese Wurzel müste zwischen $+a$ und $-a$ eine algebraisch-geometrische mittlere Proportionallinie seyn, und eine solche giebt es nicht. Demnach bezeichnet $-a^2$ zwar ein mögliches algebraisches Rechteck, das man auch mit seinen beyden Seitenlinien geometrisch construiren kann: aber ein eben so grosses algebraisches Quadrat läßt sich so wenig als die Seitenlinie desselben construiren.

64. §.

„Sind aber α und β bejahend, so sind γ und δ der Lage nach verneinend, das ist wohl nicht zu leugnen. Soll-

te

te etwa diese Voraussetzung die Verwirrung anrichten? Bis jetzt scheint mir es nicht widersinnisch, eine der bejahenden Fläche entgegen liegende vor verneinend zu halten, so wie linien, die von der positiven Seite den Rückweg nehmen, negativ heissen.„

Es ist algebraisch vollkommen richtig, daß γ und δ als negative Grössen in Rechnung kommen, wenn man die Richtungen PL, PO als positive in Rechnung gebracht hat. Allein die algebraische Bezeichnung mit den Zeichen + und (—) gehet nur die Rechnung nicht die Sache selbst an, γ und δ werden negativ nicht als geometrische Quadrate, sondern nur als Flächen oder Grössen überhaupt und im allgemeinen betrachtet. Man muß sich PL als eine Abscissenlinie vorstellen, womit NM in der Entfernung LM = a parallel läuft. Zwischen PL und NM steht nun über jeder Abscisse PQ = x ein Rechteck = ax, dieses wird — ax für negative x, es wird — aa für x = — a: also ist PN = — aa nur ein bestimmter Werth der ganz unbestimmten Fläche ax. Allerdings ist nun PN ein geometrisches Quadrat, dessen Seite eben so gut wirklich da ist, als das Quadrat selbst: allein bey der algebraischen Rechnung kann das, was das Zeichen — aa ausdrückt, nicht für ein algebraisches Quadrat gelten, weil es sich nicht in zwey algebraisch gleiche Factoren zerfällen lässet. Man kann überhaupt kein algebraisches Quadrat, also auch nicht die Seitenlinien eines solchen Quadrats angeben, das dem algebraischen Rechteck — ax gleich wäre, weil es zwischen + a und — x keine algebraische mittlere Proportionallinie giebt. Die Verwirrung steckt also darin, daß man algebraischen und geometrischen Sprachgebrauch nicht gehörig unterscheidet. Die Seite eines geometrischen Quadrats, das dem geometrischen Rechteck ax gleich seyn soll, ist allemahl möglich: wenn man diese Seite vermittelst einer geometrischen Construction sucht; (22. §.) 41. Fig. 34. Fig.

wenn man AD = a, DB = x nimmt, AB nun in C halbirt, und aus C mit dem Halbmesser CA einen Kreis beschreibt; so wird derselbe von der durch D auf AB senkrecht gesetzten graden Linie EF gewiß allemahl geschnitten. Wer von keiner andern, als von Euklids Geometrie etwas weiß, der wird gewiß nicht auf den Einfall kommen,

35. Fig. und DB wie in der 35 Figur von D nach A hin legen, nun AB in C halbiren, und übrigens wie vorhin verfahren. Der Algebraist macht es so, wenn ihm das DB mit dem Zeichen (—) vorkommt, und er ist dazu berechtiget, weil seine Sprache allgemeiner ist, als die geometrische, und ihn eben darum in den Stand setzt, eine Menge besondrer Fälle in eine einzige Formul zusammen zu bringen, wovon jeder bey der geometrischen Construction eine beson-

41. Fig. dre Figur erfodern würde. Daß es übrigens mit δ eben die Bewandniß, wie mit γ habe, ist schon für sich klar. Für die unbestimmte Fläche zwischen KM und PO ist PL eine constans, und zu jeder Abscisse y, die man auf PO nimmt, gehört ein Rechteck ay. Dieses wird —ay, wenn man y von P nach H zu nimmt, und in dem besondern Fall $y = PH = -a$ wird es $= --aa$. Allemahl ist —ay ein algebraisches Rechteck, nie ein algebraisches Quadrat, weil es sich nie in zwey algebraisch gleiche Factoren zerfällen läßt, so lange y das Zeichen (—) behält.

65. §.

„Eine unmögliche Grösse ist hier eine Linie, die nicht da seyn kann, und also nicht da ist, wie vorgedachte unmögliche halbe Ordinate. Hier ist also meine Frage: welchen Werth haben $\sqrt{\gamma}$ und $\sqrt{\delta}$, welche gleich sind $\sqrt{-\beta}$, $\sqrt{--\alpha}$? Das verneinende Viereck ist zu gleicher Zeit mit dem entgegen gesetzten bejahenden vorhanden, folglich auch seine Seite: diese Seite aber ist, wie der calculus zeigt, eine unmögliche Grösse, also kann sie nicht

da

da seyn. Idem non potest esse simul et non esse. Denn daß sie construirt werden könne, wie Kühn vorgiebt, ist falsch, NB wenn das Quadrat negativ genommen wird, folglich der Werth seiner Seite, die zur Construction nöthig ist, imaginär ist, welches man allezeit voraussetzen muß. Was muß man also, da wir uns hier in dem schwierigen Umstand befinden, den Seiten des verneinenden Viereckes für einen Werth beylegen? Wo steckt der Irthum im Schliessen? Der algebraische calculus läßt sich doch eben so gut auf obiges Quadrat anwenden, als er auf die krummen Linien, die unmögliche Semiordinaten erfodern, angewendet worden ist.„

Aus dem Inhalt des 64. §. folgt, wie ich glaube, nun schon von selbst die Antwort auf die erste Frage, welchen Werth $\sqrt{\gamma} = \sqrt{-\beta}$ oder $\sqrt{\delta} = \sqrt{-\alpha}$, habe? Die Antwort ist: gar keinen möglichen algebraischen Werth. Das geometrische Quadrat γ ist zu gleicher Zeit mit dem ihm zur Seite liegenden β vorhanden, und allerdings auch die Seite des geometrischen Quadrats γ. Der calculus zeigt keinesweges, daß die Seite des geometrischen Quadrats γ unmöglich sey, sie kann auch allerdings construirt werden. Allein, wenn man $\gamma = -\alpha$ oder eigentlich $\gamma = PO \times -PR$ setzt, so bleibt γ kein geometrisches Quadrat, es wird vielmehr ein algebraisches Rechteck. Auch dieses algebraische Rechteck ist zu gleicher Zeit mit dem ihm zur Seite liegenden geometrischen und zugleich algebraischen Quadrat β, vorhanden, die Seiten dieses algebraischen Rechteckes sind $+PO$ und $-PR$, oder $+a$ und $-a$, wenn $PO = PR = a$ ist: sie sind also beyde ebenfalls vorhanden und keinesweges unmöglich. Wir befinden uns also in gar keinem schwierigen Falle, und der Irthum im Schliessen steckt darin, daß wir $\gamma = -\alpha$ zum algebraischen Quadrat machen wollen, das

es nicht ist. Das dem algebraischen Rechteck $\gamma = -a$ $= -a^2$ gleiche algebraische Quadrat ist nicht zu gleicher Zeit mit dem zur Seite liegenden β vorhanden, und kann nicht vorhanden seyn, eben darum, weil die Seite eines solchen algebraischen Quadrats nicht vorhanden seyn kann. Demnach bleibt das Idem non potest esse simul et non esse in seiner vollen Kraft. Mit der Anwendung des algebraischen Calculus hat es also hier so wie in allen andern Fällen seine ungezweifelte Richtigkeit; er führt gewiß niemanden irre, der Zeichen und Sache richtig zu unterscheiden weiß, und der es nicht versäumt, die Elemente desselben sich vorher recht geläufig zu machen, bevor er es wagt, mit Hülfe deffelben eigene Untersuchungen anzustellen.

IV.

Von den

Logarithmen

der

verneinten

und unmöglichen Grössen.

1. §.

So wenig es dem Analysten gleichgültig seyn kann, ob die Wurzeln grader Exponenten aus negativen Grössen als mögliche oder als unmögliche Grössen bey algebraischen Rechnungen angesehen werden müssen; eben so wenig kann es ihm gleichgültig seyn, ob man die Logarithmen der verneinten Grössen als mögliche gelten lassen, oder ob man sie als unmögliche Resultate der Rechnung ansehen will. Bey mehrern sehr interessanten nicht blos geometrischen sondern auch physisch-mathematischen Untersuchungen kommen die logarithmischen Functionen vor. Wenn alsdenn unter gewissen Voraussetzungen das Resultat der Rechnung der Logarithme einer negativen Grösse seyn müste; so muß man doch wissen, ob die Formul ein mögliches oder ein unmögliches Resultat der Rechnung anzeige? ob die bey Einleitung der Rechnung zum Grunde gesetzten Bedingungen einander selbst oder vielleicht andern schon ausgemachten Wahrheiten widersprechen, oder ob man diesen Bedingungen ein Genüge leisten könne. Wer Herrn Eulers Schriften von der Mechanik gelesen hat, der wird sich besonders aus dem ersten Theile des Werkes: Mechanica siue motus scientia analytice exposita, Petrop. 1736. mehrere hieher gehöriger Beyspiele erinnern. Ich will nur ein solches leicht zu übersehendes Beyspiel anführen, woraus man schon wird abnehmen können, daß die Untersuchungen hierüber, so wie die in der vorstehenden Abhandlung vorgetragenen hiemit genau zusammenhängenden Lehren nicht etwa nur zu den speculativischen Subtilitäten gehören, sondern vielmehr bey den Anwendungen der Mathematik auf die Natur und Kunst allerdings erheblichen Einfluß haben.

2. §.

2. §.

Die Gesetze des Falles schwerer Körper im freyen Raum sind ziemlich bekannt. Wenn ein schwerer Körper durch den freyen Fall von der Höhe x die Geschwindigkeit c erlangt, und g die Höhe des Falles für die erste Zeitsecunde bezeichnet; so weiß man, daß $cc = 4gx$ sey. Je grösser die Höhe ist, wovon der Körper fällt, desto grösser ist auch die erlangte Geschwindigkeit. Diese kann jede Grösse haben, und eine gegebene Geschwindigkeit mag so groß seyn als man will, es bleibt allemahl möglich, eine Höhe anzugeben, wovon ein schwerer Körper fallen müste, wenn seine Geschwindigkeit eben so groß, als die gegebene werden sollte. Allemahl ist $x = \frac{cc}{4g}$, wie aus der Gleichung $cc = 4gx$ folgt. Für die Bewegung eines lothrecht steigenden Körpers, der seine Bewegung mit der Geschwindigkeit h anfängt, hat man $cc = h^2 - 4gx$. Diese Gleichung ergiebt, daß c abnehme, wenn x grösser wird, und daß x nicht grösser, als $\frac{h^2}{4g}$ werden könne, weil $c = \sqrt{-(4gx - h^2)}$ eine unmögliche Wurzelgrösse wird, wenn $x > \frac{h^2}{4g}$, also $4gx > h^2$ ist. Wenn Hrn. Kühns Lehre (M. s. die vorstehende III. Abhandlung 57. u. f. §§.) algebraisch richtig wäre, und nun die Formul für c noch etwas mögliches anzeigte, so wäre unsern algebraischen Formuln wenig oder gar nicht zu trauen: denn soviel begreift ein jeder von selbst ohne alle Rechnung, daß auch im freyen Raum der lothrecht aufwärts geworfene schwere Körper nur bis zu einer gewissen Höhe steigen könne, alsdenn aber wieder umkehren und herabfallen müsse.

3. §.

In der Luft fallen die schweren Körper nicht frey herab, die Luft widerstehet der Bewegung desto stärker, je grösser die Geschwindigkeit der Bewegung ist. Wenn der Körper auch im Wasser oder in jeder andern Flüssigkeit sinkt; so hat es damit eine ähnliche Bewandniß, und die Grösse des Widerstandes hängt wie leicht zu erachten ist, auch von der Dichtigkeit des Flüssigen ab, worin der Körper sinkt. Wenn nun, wie man es der Natur gemäß befunden hat, die Grösse des Widerstandes dem Quadrat der Geschwindigkeit des fallenden Körpers proportional angenommen wird, so findet man die nachstehende Gleichung für die Geschwindigkeit, welche ein von der Höhe x herabgefallene Körper erlangt hat, $cc = k^2 (1 - e^{-4gx:kk})$. Das e ist die Grundzahl der natürlichen Logarithmen, und k bezeichnet die Geschwindigkeit, welche der Körper erlangt haben muß, wenn der Widerstand des Flüssigen seinem Gewicht gleich seyn soll. (M. s. meinen Lehrbegriff der Math. IV. Theil, 321. §. Mech. 348. §. woselbst man $p = 1$, und $h = 0$ setzen muß.) Diese Gleichung ergiebt, daß c nie $= k$ werden könne, die Höhe x, wovon der Körper fällt, mag so groß seyn, als man will.

4. §.

Die Geschwindigkeit eines im widerstehenden Raum lothrecht steigenden Körpers, wenn seine Bewegung mit der Geschwindigkeit h anfängt, giebt die Gleichung $cc = kk + hh)e^{-4gx:kk} - kk$: (a. a. O. 331. §. Mech. 371. S. wenn daselbst $p = 1$ gesetzt wird) der Natur der Sache nach muß c abnehmen wenn x gröffer wird, wie auch die Gleichung richtig anzeigt. In dem Falle $(kk + hh)e^{-4gx:kk} = kk$ giebt sie $c = 0$: also steigt der Körper nur so lange, als $kke^{-4gx:kk} < kk + hh$ bleibt,

bleibt, oder $e^{4gx:kk} < \frac{kk+hh}{kk}$, woraus $x < \frac{kk}{4g} \times l \frac{kk+hh}{kk}$ folgt. Eine grössere Höhe x würde $c = \sqrt{-(kk-(kk+hh)e^{-4gx:kk})}$ geben, welches wiederum eine unmögliche Wurzelgrösse ist. Diese Formul richtig verstanden lehrt uns das, was wir alle Tage erfahren, daß schwere Körper, welche man in freyer Luft lothrecht in die Höhe wirft, bald wieder umkehren und herab fallen müssen. Zeigte also die Wurzelgrösse noch was mögliches an, so wäre die algebraische Sprache schlecht mit der Natur der Sache übereinstimmend.

5. §.

Aus der Gleichung $cc = kk(1 - e^{-4gx:kk})$ (3. §.) folgt $1 - \frac{cc}{kk} = \frac{1}{e^{4gx:kk}}$, also $e^{4gx:kk} = \frac{kk}{kk-cc}$, mithin ferner $x = \frac{kk}{4g} l \frac{kk}{kk-cc}$. Wenn also die Geschwindigkeit c gegeben ist, womit ein schwerer Köper im widerstehenden Raum zu Boden fallen soll; so zeigt diese Gleichung, wie groß die Höhe x seyn müsse, wovon der Körper herab fallen muß, um so viele Geschwindigkeit zu erlangen. Wenn $c = k$ seyn sollte, so liesse sich keine solche Höhe x angeben, jede noch so grosse Höhe würde zu klein seyn, wie es auch mit dem 3. §. übereinstimmet. Wie aber, wenn $c > k$ seyn sollte? Die Gleichung giebt alsdenn $x = \frac{kk}{4g} l - \frac{kk}{cc-kk}$, und der eine Factor ist ein logarithme einer negativen Grösse. Entweder die ganze vorige Rechnung muß falsch seyn, oder eben dieser Factor muß hier etwas unmögliches anzeigen. Vermöge jener

jener Rechnung bleibt c nothwendig allemahl kleiner als k und kann nie = k werden, x sey so groß als man will. Wenn man demnach so gar verlangt c soll grösser als k werden, so ist es gewiß unmöglich eine so grosse Höhe x anzugeben, wovon der schwere Körper herabfallen müste, um die vorgeschriebene Geschwindigkeit c zu erlangen.

6. §.

Herr Euler nimmt in seinem schon angeführten Werke von der Mechanik und in andern Schriften, dergleichen Resultate der Rechnung für unmögliche an: eigentlich zeigt die algebraische Formul in solchen Fällen an, daß man nicht allen Bedingungen der Aufgabe zusammen genommen ein Genüge leisten könne. (M. s. die voranstehende III. Abhandlung im 22. §.) Indessen hat es doch H. Euler für nöthig gehalten eine eigene sehr lehrreiche Abhandlung über die Natur der Logarithmen überhaupt und insbesondre solcher Logarithmen aufzusetzen, die negativen Zahlen zusammen gehören müsten: man findet sie in der Histoire de l' Academie Royale des Sciences de Prusse Année 1749, pag. 139. sqq. Der Titel ist: Sur la Controverse entre Mrs. Leibnitz et Bernoulli sur les Logarithmes de nombres negatifs et imaginaires. Im Eingange zu dieser Abhandlung erzählt H. Euler die nähere Veranlassung zu der Streitigkeit, welche die Herrn von Leibnitz und Johann Bernoulli vormahls in Briefen mit einander über die Natur der Logarithmen negativer Zahlen mit einander geführt haben, die sich in der unter dem Titel Commercium litterarium inter Leibnitium et Ioh. Bernoullium gedruckten Sammlung mit befinden. In dem Briefe n. CXC. des Commercii hatte H. v. Leibnitz das Verhältniß + 1 : — 1 oder — 1 : + 1 aus dem Grunde für ein imaginäres Verhältniß erklärt, weil dieses Verhältniß, oder die Zahl — 1, keinen möglichen Logarithmen habe. Dagegen erklärte H. Bernoulli in dem Briefe

n. CXCIII, daß er nicht eben derselben Meinung sey, vielmehr die Logarithmen der negativen Zahlen als mögliche Grössen ansehe. Seine Meinung gieng nemlich dahin, daß der Logarithme einer negativen Zahl mit dem Logarithmen der ihr entgegen gesetzten positiven Zahl einerley sey. Nach diesem Eingange trägt H. Euler die vornehmsten Gründe umständlich vor, welche H. Bernoulli gebraucht hat, seine Behauptung zu beweisen, hiernächst des H. v. Leibnitz Einwendungen dagegen, ferner die Beweise, worauf H. v. Leibnitz seine Behauptung gegründet hat zugleich mit den von H. Bernoulli dagegen gemachten Einwendungen. H. Euler selbst erklärt endlich, nachdem er die ganze Theorie der Logarithmen in sehr grosser Allgemeinheit vorgetragen hat, des H. v. Leibnitz Behauptung für die richtige.

7. §.

Die Sache war aber hiemit noch nicht zur allgemeinen Befriedigung entschieden. Wir haben vom Herrn d'Alembert eine Sammlung schätzbarer Abhandlungen unter dem Titel Opuscules Mathematiques, wovon der erste Band im Jahr 1761 zu Paris im Druck erschienen ist: die sechste unter diesen Abhandlungen, mit einem noch beygefügten Supplement, betrift ebenfalls die Logarithmen negativer Zahlen. H. d'Alembert, welcher völlig dem H. Bernoulli beypflichtet, erzählet gleich im Anfange dieser Abhandlung, daß er in den Jahren 1747 und 1748 mit dem Herrn Euler einen ähnlichen Briefwechsel wie Leibnitz mit Bernoulli darüber geführet habe, und es scheinet, daß der im vorigen §. angeführte Aufsatz des H. Euler in der Histoire de l'Academie de Berlin eben dadurch sey veranlasset worden. Indessen hat auch dieser Eulerische Aufsatz H. d'Alembert noch nicht völlig befriediget, wenigstens glaubt er, die Sache sey noch nicht ganz entschieden. Wundern muß man sich billig, daß Männer von so allgemein anerkannten Verdiensten

um

um die Mathematik so verschieden über eine Frage haben urtheilen können, die ihrer Natur nach zu den ersten Anfangsgründen der algebraischen Analysis gehört, die sogleich entschieden seyn muß, sobald man sich nur darüber einverstanden hat, was ein Logarithme und was eine verneinte Grösse, oder verneinte Zahl eigentlich seyn soll. Ein deutsches Frauenzimmer von hohen Range, nicht etwa nur Liebhaberin, sondern im eigentlichsten Sinne grosse Kennerin der tiefsinnigsten Mathematik, mit den Schriften der alten griechischen Geometer so gut, als mit den jetzigen neuen Schriftstellern bekannt, äusserte bey Gelegenheit einer Unterredung mit mir, sie habe wider alles Erwarten beym Lesen der Schriften grosser Mathematiker manchen Verstoß gegen die ersten Elemente wahrgenommen. Eine Bemerkung, worauf ich nur so viel erwiedern konnte, daß oft das weitsichtigste Auge, welches das größte Feld der entlegentsten Sachen sehr deutlich übersiehet, sich entwöhne nahe liegende Kleinigkeiten deutlich genug wahrzunehmen. Die Antwort befriedigte nicht: mir ward entgegen gesetzt, daß die Festigkeit des Grundes die erste Haupteigenschaft eines jeden Gebäudes, also auch des Lehrgebäudes einer Wissenschaft sey.

Die Herrn v. Leibnitz und Bernoulli denken alle beyde nicht daran, wie nöthig es sey, vor allen Dingen zuerst die Grundbegriffe festzusetzen, ihre Beweisgründe und Gegenbeweisgründe sind aus den Regeln des Calculs selbst, deren Sinn doch einzig und allein von den ersten Grundbegriffen abhängt, ja so gar aus den Regeln der Differentialrechnung und höhern Geometrie hergenommen. Herr Euler setzt als bekannt voraus, daß alle übrige Logarithmen-Systeme vom System der natürlichen Logarithmen nach einem beständigen Modulus abhängen, und gründet daher seine Untersuchungen auf die Formul, welche man bey Berechnung der natürlichen Logarithmen zum

Grunde setzt, wenn die Gränze des Werthes $(1+\frac{1}{n})^n$ für die Grundzahl angenommen wird, da dann die Gränze des Werthes $\frac{m}{n}$ der natürliche Logarithme derjenigen Zahl wird, welcher sich die Potenz $(1+\frac{1}{n})^{\frac{m}{n}}$ als ihrer Gränze nähert, wenn $\frac{1}{n}$ bis auf o abnimmt. Man könnte freylich wünschen, daß H. Euler noch etwas weiter bis auf die ersten Grundbegriffe zurück gegangen wäre, auch glaubt H. d'Alembert, daß H. Eulers Voraussetzung noch Erinnerungen ausgesetzt sey, worüber ich mich im folgenden weiter erklären werde. Vorläufig genügt es hier zu bemerken, daß bey dem allen doch H. Eulers Abhandlung über die ganze Untersuchung das meiste licht verbreite. Weil die Formuln, welche das allgemeine Gesetz angeben, nach welchem jede Zahl und ihr Logarithme von einander abhängen, transcendent sind, so müssen sie sich von den algebraischen Functionen durch ganz eigenthümliche Eigenschaften auszeichnen: eben dieses eigenthümliche der logarithmischen Functionen hat H. Euler am vollständigsten auseinander gesetzt, und ich behalte mir vor, weiter unten das wichtigste daraus anzuführen.

9. §.

Herr d'Alembert fängt wirklich mit Elementarbegriffen an: nur Schade daß sie so, wie sie von ihm vorgetragen sind, schwerlich gebraucht werden können, diese so verwickelt scheinende Sache in ihr völliges Licht zu setzen. On appelle Logarithmes une suite de nombres en progression Arithmetique *quelconque*, repondans a une suite de nombres en progression Geometrique quelconque. Dies-

ses ist des H. d'Alemberts Erklärung des Begriffes von den Logarithmen, (a. a. O. 181. S.) und man lieset sie eben so in mehrern Lehrbüchern. Um hier nicht zu umständlich zu werden, will ich mich auf dasjenige nur kurz beziehen, was ich davon in meinem Lehrbegriffe der Mathematik 2 Theil. VI. Abschnitt der Allg. Rechenkunst vorgetragen habe. Es ist so wenig eine Erklärung der eigentlichen Natur der Logarithmen, daß nicht einmahl darin ausgedrückt ist, wie und auf welche Art die Glieder der arithmetischen Progression mit den Gliedern der geometrischen Progression verbunden seyn sollen. Mit einer solchen Erklärung hängt es freylich ganz wohl zusammen, wenn H. d'Alembert bald nachher hinzu setzt: il n' y a aucune liaison necessaire entre ces deux progressions, und wenn auch eben dasselbe auf der 199. S. wiederhohlt wird: Il n' y a aucune liaison necessaire entre une suite de nombre et la suite des logarithmes qui leurs repondent. Ja auf der 195 S. heißt es so gar: En effet tout systeme de Logarithmes est arbitraire en soi, et il est clair, que 0, 0, 0, 0, etc. formant une progession Arithmetique, je puis au dessus d'une progression Geometrique quelconque imaginer une suite de zeros, qui seront chacun les Logarithmes du nombre qui leur repond.

10. §.

Man würde sich dergleichen Stellen bey Schriftstellern von solchem Gewicht und Ansehen, wie H. d'Alembert gar nicht erklären können, wenn man nicht wüste, daß es lange an guten Lehrbüchern besonders bey den Ausländern gefehlt hat. Was man Algebra nannte, war immer noch weiter nichts als algebraische Zahlenrechenkunst; von Lehrbüchern dieser Art gieng man gleich zum lesen solcher Werke fort, worin die algebraische Analysis in ihrer ganzen Allgemeinheit auf die höhere Geometrie angewandt wird. Von den Erfindern der neuern Analy-

sis hat man eine Menge kleinerer Abhandlungen über einzelne Materien, woraus man zwar die Erfindungen selbst lernen konnte: allein es fehlte immer noch der systematische Zusammenhang sovieler Bruchstücke unter einander. Die ersten Verfasser grösserer Werke, welche diese Lehren sammelten, um ein Ganzes daraus zu machen, blieben grösstentheils bis auf den Ausdruck beym Vortrage der Erfinder, die gemeine Rechenkunst und die gemeine Algebra setzte man gewöhnlich als bekannt voraus, und wenn man ja davon etwas mitnahm, so blieb der Vortrag grösstentheils so, wie er bey den ältern Algebraisten gewesen war. Die Lücke zwischen der gemeinen algebraischen Rechenkunst, und der allgemeinen algebraischen Analysis blieb lange unausgefüllt, und ich darf auch das, ohne mir mit Grunde den Vorwurf einer zu grossen Partheylichkeit zuzuziehen, wohl hinzusetzen, daß deutsche Mathematiker diese Lücke auszufüllen, am meisten bemühet gewesen sind. Die Elementa Matheseos des Herrn Hausen haben vornemlich zuerst Epoche gemacht: mehrere hieher gehörige verdiente Schriftsteller habe ich schon in der vorstehenden III. Abhandlung genannt, worauf ich mich Kürze halber beziehe.

11. §.

Die Herrn von Leibnitz und Bernoulli, auch Hr. Euler, scheinen den Begriff davon, was negative Grösse oder negative Zahl sey, als ganz bekannt vorauszusetzen: nur H. d'Alembert scheinet darauf Bedacht genommen zu haben, daß keine gründliche und richtige Entscheidung der streitig gewordenen Frage zu hoffen sey, wenn man sich über den Begriff von der negativen Zahl nicht vorher einverstanden habe. Er streuet daher einige Gedanken darüber in seinen Vortrag ein: doch finde ich keine so deutliche und der Sache genau angemessene Erörterung dieses Grundbegriffes, als man hier wünschen muß. Bald ist der Vortrag ganz richtig und der Sache gemäß, wie

auf

auf der 202 Seite: C'eſt que le ſigne, que porte l'expreſſion algebrique de cette ordonnée n' indique que la *poſition*, und auf der 203. Seite: En un mot toute quantité par elle meme a le ſigne +, elle ne porte le ſigne — que *relativement aux autres* exprimés ou ſous entendus. Mit der Benennung: Gröſſen oder Zahlen unter Nichts iſt H. d'Alembert nicht zufrieden, (a. a. O. 201. 204. S.) ja eben dieſe ihm anſtöſſige Benennung veranlaſſet ihn, auf der 204 S. unten eine Anmerkung beyzufügen, worin er die Algebraiſten beſchuldiget, daß ſie den Begriff einer negativen Gröſſe bis dahin immer noch ſchlecht entwickelt hätten: ſeine eigene Erläuterung ſcheint indeſſen mir wenigſtens eben ſo wenig befriedigend zu ſeyn.

12. §.

Auf die Frage nemlich: warum y in der Gleichung $by = (a - x)^2$ poſitiv bleibe, wenn $x > a$ mithin $a - x$ negativ ſey? wird die Antwort ertheilet, weil $(a - x)^2$ in dieſem Falle nicht das Quadrat von $a - x$ ſondern von $x - a$ ſey: eben darum begreife die Gleichung $by = (a - x)^2$ eigentlich zwey Gleichungen in ſich, die eine $by = (a - x)^2$, für $x < a$, die andre $by = (x - a)^2$ für $x > a$. „Allein kann man nicht eben ſo beweiſen, daß y in der Gleichung $by = (a - x)^3$ und überhaupt in jeder Gleichung wie $by = (a - x)^{2n+1}$ ebenfalls allemahl poſitiv ſeyn müſſe? Es wird ſo gar hinzugeſetzt: Ce qui s'accorde avec ce que nous avons dit, que les quantités négatives indiquent *une fauſſe ſuppoſition*; (Man vergleiche a. a. O. die 203 S.) car l'équation $by = (a - x)^2$, quand $x > a$, eſt proprement *une fauſſe equation*; la veritable eſt $by = (x - a)^2$. Alſo iſt auch in eben dem Fall $x > a$ die Gleichung $by = (a - x)^{2n+1}$ eine falſche Gleichung, die wahre iſt $by = (x - a)^{2n+1}$, und hiemit fallen alle negative Potenzen aus den algebraiſchen Rechnungen weg. Ich habe mich in der vorſtehenden III. Abhandlung umſtänd-

lich über den Begriff von den algebraischen negativen Grösſen erklärt, weßwegen ich mich im folgenden, wo es nöthig ist, darauf werde beziehen können.

13. §.

Schon Michael Stiefel trägt in seiner Arithmetica integra Lib. I. Cap. IV. fol 37. b. die sehr richtige Bemerkung vor, daß man Verhältnisse als Verhältnisse betrachtet eben so unter einander vergleichen könne, wie man sonst einzelne Grössen vergleicht; daß man aus einem angenommenen Grundverhältnisse ein andres so vielmahl zusammen setzen könne, als eine vorgelegte Zahl fodert; daß man ein gegebenes Verhältniß in eine vorgeschriebene Anzahl gleicher Verhältnisse als gleiche Theile des Ganzen eintheilen könne. Die Stelle ist zwar oben im 25. §. der vorstehenden III Abhandlung schon angeführt worden: sie ist aber so merkwürdig, daß ich nicht umhin kann, sie ganz hieher zu setzen. „Potuit etiam Algorithmus proportionum (das ist bey ihm so viel als rationum, wie wir es nennen, welches unter andern Stellen auch der Anfang des Cap. VI. Lib I. fol 47. ergiebt) ex hujusmodi speculationibus inveniri: vt quod $\frac{2}{1}$ ad $\frac{2}{1}$ facit $\frac{4}{1}$. Item $\frac{2}{1}:\frac{2}{1}:\frac{2}{1}$, id est dupla triplicata, quod illa facit $\frac{8}{1}$, facile potuit considerari: vel ex illis ordinibus, qua naturalis numerorum progressio servit progressionibus Geometricis, vt

0	1	2	3	4	5
1	2	4	8	16	32

hic 5 non solum significat numerum sibi subscriptum (id est 32) facere proportionem quintam, sed significat etiam eundem numerum sibi subscriptum, collatum vnitati, esse proportionem *quintuplicatam* respectu primae proportionis. Et tertio signat modum ipsum, quo vel per additionem, vel per quintuplationem primae proportionis fiat proportio haec quintuplicata $\frac{32}{1}$: scilicet $\frac{2}{1}$

quin-

quinquies posita, atque ita secundum regulam multiplicationis Minutiarum facta operatione, producitur quintuplicatae proportionis collectum: vt $\frac{2}{1}.\frac{2}{1}.\frac{2}{1}.\frac{2}{1}.\frac{2}{1}.$ facit $\frac{32}{1}$ Et quia per multiplicationis regulam, quam habent Minutiae vulgares, fit additio proportionum, facile fuit, (hoc intellecto) concludere, vt regula divisionis Minutiarum seruiret etiam subtractioni proportionum, cum ubique hoc verum sit, quod additio probet subtractionem, et subtractio additionem, etc. Deinde, cum inter 1 et 32 medient numeri hi, 2, 4, 8, 16, ita vt *diuidant* proportionem $\frac{32}{1}$ in quinque proportiones aequales, i. e. in quinque duplas.

14. §.

Das sind die Grundbegriffe der Lehre von den Logarithmen, so wie sie in unsern besten neuen Lehrbüchern vorgetragen werden, und es fehlt nichts weiter als der Nahme. Wenn es gleich jetzt in mehrern neuern Schriften ist bemerkt worden, daß Stiefel wirklich auf die Grundbegriffe und Grundoperationen in der Lehre von den Logarithmen verfallen sey; so wird doch gewöhnlich die oben in der vorstehenden III. Abhandlung von mir bemerkte Stelle nur angeführt. Obgleich diese Stelle allerdings völlig beweisend, und in mehr als in einer Absicht merkwürdig ist; so findet man doch im I. Buch nicht allein an der im vor. §. angezogenen sondern auch an mehrern Stellen, und besonders noch im VI. Cap des I. Buches, die ganze Sache noch viel vollständiger. Es hat dieses VI. Capitel den Titel: De proportionibus et earum Algorithmo. Im folgenden werde ich noch nähere Veranlassung haben, verschiedenes daraus anzuführen: hier bemerke ich nur, daß die Regeln des Algorithmi proportionum, oder rationum, wie wir es nennen würden, fol. 52. sqq. vorgetragen werden, und dieser Algorithmus ist nichts anders als der wahre Grund aller logarithmischen Rechnungen. Man kann

den Inhalt grösstentheils auf das allgemeine Problem zurück führen: Ein Verhältniß ist gegeben, und eine Zahl, welche angiebt, wie ein noch unbekanntes Verhältniß aus jenem als Maaßverhältnisse durch Theilung und Zusammensetzung entstehen kann; man soll das unbekannte Verhältniß finden. Nur ein Exempel. Man soll ein Verhältniß angeben, welches $\frac{3}{4}$ des Verhältnisses $\frac{81}{16}$ ausmacht. Zuerst wird das dreymahl grössere Verhältniß $\frac{81}{16} \cdot \frac{81}{16} \cdot \frac{81}{16}$ $= \frac{531441}{4096}$ gesucht, und hievon $\frac{1}{4}$, das heißt $\sqrt[4]{\frac{531441}{4096}}$ $= \frac{27}{8}$, genommen. Nach unserm Sprachgebrauch würden wir sagen, wenn $\frac{81}{16}$ das Grundverhältniß, oder Maaßverhältniß ist, so ist $\frac{3}{4} = \log. \frac{27}{8}$. Eine solche Verbindung der arithmetischen Progression mit der geometrischen ist doch wohl nicht so ganz willkührlich, daß eine Reihe Nullen eben so gut, als jede andre arithmetische Progression dienen könnte.

15. §.

Man weiß, daß Neper den Nahmen Logarithmus, ἀριθμὸς λόγων, numerus rationum, zuerst gebraucht hat. Er brachte wirklich eine arithmetische Progression mit einer geometrischen in Verbindung, und nannte die Glieder der arithmetischen Progression logarithmen der dazu gehörigen Glieder der geometrischen Progression: allein diese Verbindung sollte nicht so ganz willkührlich seyn, die gleichen Differenzen der Glieder der arithmetischen Progression sollten die gleichen Verhältnisse vom ersten Gliede der geometrischen Progression bis zu jedem folgenden Gliede fortzählen. Wenn mit dem Index n in der arithmetischen Progression das allgemeine Glied $\alpha + n\delta$ zusammen gehörte, so sollte in der geometrischen Progression das Glied $m^n a$ damit zusammen gehören. Hier behält man zwar seine Freyheit, α, δ, a und m, so groß als man will anzunehmen: allein das sind auch nur die beständigen Zahlen unter denjenigen, worauf es hier ankommt,

kommt, das Gesetz, nach welchem $a + n\delta$ und $m^n a$ von einander abhängen sollen, wenn man n für eine veränderliche Zahl annimmt, wird dadurch nicht geändert. Sonst kann man auch behaupten, es sey gar keine nothwendige Verbindung zwischen den Coordinaten x und y einer krummen linie, besonders wenn nicht allein die Grösse, sondern auch die Gestalt der linie von den beständigen Coefficienten in der Gleichung abhängt. In der Gleichung $yy = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$ kann man a und b wie man will annehmen, die Gleichung gehört zu unzählig vielen der Gestalt und Grösse nach verschiedenen Ellipsen: folgt denn daraus, daß zwischen den Coordinaten der Ellipse gar keine nothwendige Verbindung sey? Neper setzt $\alpha = 0$, $\delta = 1$, $a = 10000000$, $m = 1\frac{9999999}{10000000}$, nun wird n eine Zahl, welche angiebt, wievielmahl das Verhältniß ma:a oder m:1 in dem Verhältnisse $m^n a$:a enthalten sey. Wenn nun gleich Neper die Zahl n kurz Logarithmen der Zahl $m^n a$ nennt; so ist sie doch eigentlich der Logarithme des Verhältnisses $m^n a$:a. Daß dieses Nepers eigentliche Meinung sey, leuchtet aus seinem ganzen Vortrage deutlich genug hervor, und selbst der Nahme ist diesem Sinne gemäß gewählt.

16. §.

Wenn man diese Grundbegriffe, worauf Neper die Berechnung seiner Logarithmen gebauet hat, mit demjenigen vergleicht, was ich im 13. und 14. §. aus Stiefelii Arithmetica integra angeführt habe, so nimmt man leicht wahr, daß es bey dieser Sache ganz eigentlich auf eine solche Vergleichung aller Verhältnisse unter einander ankomme, die derjenigen ganz ähnlich ist, wie man sonst andre gleichartige Grössen unter einander vergleicht: nur muß man richtige Begriffe davon haben, was das heisse, ein Verhältniß aus mehrern andern zusammen setzen; oder

ein

ein Verhältniß in mehrere andre gleiche oder ungleiche Verhältnisse theilen. Man kann ein Verhältniß als Maaßverhältniß wählen, um alle andre Verhältnisse damit zu vergleichen; eben so wie man die Länge einer Ruthe, eines Fusses, als Längenmaaß wählt, um alle andre Längen damit zu vergleichen. Wenn das Verhältniß 2:1 das Maaßverhältniß seyn soll, so fasset das Verhältniß 16:1 vier Maaßverhältnisse, es ist viermahl grösser, als das Maaßverhältniß 2:1. So wie jedes Maaß überhaupt willkührlich gewählt werden kann, so kann man auch bey Ausmessung der Verhältnisse das Maaßverhältniß willkührlich wählen. Die Absicht der Ausmessung gehet allemahl dahin, daß man eine Zahl sucht, welche angeben soll, wievielmahl das angenommene Maaß in der auszumessenden Grösse enthalten sey. Es ist eine Art von Division, und eben darum kann die gesuchte Zahl nur in solchen Fällen eine ganze Zahl seyn, wenn das Maaß selbst in der auszumessenden Grösse aufgehet. In andern Fällen theilt man das Maaß in mehrere gleiche Theile, und versucht, ob ein aliquoter Theil desselben in der auszumessenden Grösse aufgehe: alsdenn wird die gesuchte Zahl ein Bruch, wie wenn es heißt, eine Länge mache $\frac{3}{4}$ Ellen aus. Eben diese Regel kann man bey Ausmessung der Verhältnisse anwenden: man kann das Maaßverhältniß in kleinere gleich grosse Verhältnisse theilen, die man als Theile des ganzen betrachtet. Wenn alsdenn ein solcher Theil des Maaßverhältnisses in dem auszumessenden Verhältnisse mehrere mahl enthalten ist; so läßt sich eine gebrochene Zahl finden, die es angiebt, wie groß das auszumessende Verhältniß gegen das Maaßverhältniß sey. Das Verhältniß 32:1 ist aus dem Verhältnisse 16:1 so zusammen gesetzt, wie die Zahl $\frac{1}{4}$ aus Eins: also macht das Verhältniß 32:1 eben soviel aus, als $\frac{1}{4}$ des Maaßverhältnisses 16:1. Wenn kein noch zu bestimmender Theil des Maaßverhältnisses in demjenigen, so damit verglichen

wird,

wird, mehrere mahl genau enthalten ist; so läßt sich die Grösse dieses Verhältnisses gegen das Maaßverhältniß nicht anders als durch eine Irrationalzahl ausdrücken. In allen diesen Fällen aber heißt diejenige Zahl, welche die Grösse eines Verhältnisses A:B gegen das angenommene einfache ausdrückt, oder welche aus ihrer Einheit so entstehet, wie das Verhältniß A:B aus dem einfachen zusammen gesetzt ist, der Logarithme des Verhältnisses A:B. In dem besondern Fall, wenn $B = 1$ ist, sagt man kurz Logarithme der Grösse, oder der Zahl A, allemahl aber ist der Logarithme des Verhältnisses A:1 gemeint. Logarithmen einzeln gesetzter Zahlen, oder einzeln gesetzter Grössen, giebt es nicht.

17. §.

Man kann ein für allemahl ein gewisses Verhältniß $a:1$, als das Maaßverhältniß annehmen, und die Verhältnisse aller übrigen Zahlen zur Einheit damit vergleichen: auf solche Art wird eine Reihe von Logarithmen bestimmet, die einer Reihe von bestimmten Zahlen zugehöret, und eine solche Reihe von Logarithmen, mit ihren zugehörigen Zahlen, macht ein logarithmisches System aus. Man kann also sagen, ein jedes Logarithmensystem sey willkührlich, weil es willkührlich ist, wie groß man das Maaßverhältniß $a:1$ annehmen will: allein dem ohnerachtet bleibt doch zwischen den Logarithmen und ihren zugehörigen Zahlen eine nothwendige Verbindung, in wie ferne es nothwendig ist, daß eine bestimmte Zahl diesen und keinen andern Logarithmen haben müsse, sobald festgesetzt ist, wie groß das Maaßverhältniß $a:1$ seyn soll. Jedes System der bekannten trigonometrischen Linien ist ebenfalls in einem gewissen Sinne willkührlich, weil es willkührlich ist, wie groß man den Halbmesser des Kreises sowohl bey der geometrischen Verzeichnung als auch bey der Berechnung annehmen will: allein sobald der Halbmesser bestimmt

stimmt ist, sobald ist es auch nothwendig, daß ein jeder bestimmter Winkel oder Bogen diesen bestimmten Sinus, Cosinus, u. s. f. und keinen andern haben müsse. Es ist keinem Mathematiker unbekannt, daß beyde Systeme der Logarithmen und der trigonometrischen Linien die größte Aehnlichkeit mit einander haben. Wenn die Halbmesser gleich verschieden sind, so sind doch die gleichnahmigen trigonometrischen Linien, die zu einerley Winkel gehören, in einem beständigen Verhältnisse, und eben die Bewandniß hat es mit verschiedenen Logarithmensystemen. Wenn gleich in verschiedenen Systemen verschiedene Maaßverhältnisse zum Grunde liegen; so stehen dennoch die Logarithmen, die zu einerley Verhältniß gehören, in einem beständigen Verhältnisse. In verschiedenen trigonometrischen Systemen verhalten sich gleichnahmige trigonometrische Linien, die zu einerley Winkel gehören, wie die Halbmesser der Systeme: in verschiedenen Logarithmensystemen verhalten sich die Logarithmen, welche zu einerley Verhältniß gehören, umgekehrt wie die Maaßverhältnisse der Systeme. Das Verhältniß $a^{rn} : 1$ ist *r*mahl grösser, als das Verhältniß $a^{n} : 1$, und *rn*mahl grösser als das Verhältniß $a : 1$. Wenn nun im I. System das Verhältniß $a^{n} : 1$, im II. System das Verhältniß $a : 1$ als Maaßverhältniß gebraucht ist; so ist in I. System log. $(a^{rn} : 1) = r$, und im II. System log. $(a^{rn} : 1) = rn$. Der Logarithme des II. Systems ist *n*mahl grösser, als der Logarithme des I. Systems, weil im II. System das Maaßverhältniß *n*mahl kleiner ist als im I. System. So geht es bey allen andern Messungen: ein Zimmer, daß 10 Ellen lang ist, muß 20 Fuß lang befunden werden, wenn 1 Fuß halb so lang als 1 Elle ist.

18. §.

Die Logarithmen eines jeden Systems lassen sich auch durch geometrische Grössen, durch Linien, Flächen, wie man

man will vorstellig machen: das sind einem jeden, der sonst mit algebraischen Rechnungen umzugehen weiß, nun schon ganz bekannte Dinge. Man kann festsetzen, daß mit den Verhältnissen $\frac{A}{B}, \frac{A^2}{B^2}, \frac{A^3}{B^3}, \frac{A^4}{B^4}, \ldots \frac{A^n}{B^n}$, die Logarithmen a, 2a, 3a, 4a, ... na, zusammen gehören sollen, und nun kann a eine grade Linie, eine Fläche, seyn, wie man will. Sovielmahl als nun a in jedem na enthalten ist, eben sovielmahl ist das Verhältniß $\frac{A}{B}$ in jedem Verhältnisse $\frac{A^n}{B^n}$ enthalten. Wenn man die Sache so vorstellig macht, so können die Logarithmen auch in einem ähnlichen Sinne Verhältnißmaasse heissen, in welchem man die Kreisbogen als Winkelmaasse betrachtet. Das ist *Cotesii* Sprachgebrauch in seinem in seiner Art classischen Werke: Harmonia mensurarum, sive Analysis et Synthesis per rationum et angulorum mensuras promota, post mortem Auctoris edita a *Rob. Smith* Cantabrigiae 1722. Die Theorie von den Verhältnißmaassen heißt bey ihm sehr richtig Logometria in einem ähnlichen Sinne, wie man sonst das Wort Cyclometria gebraucht. Von ihm rühren die bekannten Kunstgriffe in der Integralrechnung her, wenn man die gesuchten Integrale auf die Berechnung der Logarithmen oder der Kreisbogen zurück führet. Eben dahin gehört auch das Werk Analyse des mesures des rapports et des angles, ou Reduction des Integrales au logarithmes et aux arcs de cercle, par D. C. Walmesley, B. A. a Paris, 1753. Der Herr Verfasser dieses letztern Werkes bemerkt in der Vorrede, daß Coteſii Harmonia Mensurarum nicht allein selten, sondern auch überdem nicht einem jeden Leser leicht verständlich sey. Sollte aber ein d'Alembert Cotesens

Werk

Werk, oder wenigstens das zu Paris selbst im Jahr 1753 schon ans licht getretene Walmesleysche Werk nicht gekannt haben, als er die im Jahr 1761 seinen Opuscules Mathematiques beygefügte oben im 7. §. angeführte Abhandlung auffetzte? In den Jahren 1747 und 1748, als H. d'Alembert mit H. Euler über die Frage von den Logarithmen verneinter Grössen den oben erwehnten Briefwechsel führte, war das Werk des H. Walmesley noch nicht gedruckt vorhanden; Herrn Eulers Auffatz, welchen H. d'Alembert eigentlich widerlegen will, ist im Jahr 1751 also ebenfalls noch früher, als jenes Werk im Druck erschienen: demnach kann es wohl seyn, daß H. d'Alembert sein Memoire zu einer Zeit aufgesetzt hat, da ihm das Walmesleysche Werk noch nicht zu Gesicht gekommen war. Von Cotesii Werk muß ihn doch wenigstens etwas bekannt gewesen seyn, weil er a. a. O. 200. S. selbst H. Cotes unter denjenigen Geometern nennt, welche die Logarithmen als Verhältnißmaasse betrachtet haben.

19. §.

Vielleicht hat H. d'Alembert an dieser Stelle, wenn er von mehrern Geometern redet, auch H. Walmesley in Gedanken; er hat es aber wohl nicht der Mühe werth gehalten, auch nur soviel in dem einen oder dem andern dieser Werke zu lesen, als nöthig war, auch nur Cotesens Sprache zu verstehen: sonst kann ich mir wenigstens a. a. O. 200. S. die nachstehende Stelle gar nicht erklären. C'e seroit une grande erreur de penser, que les Logarithmes expriment les rapports; ce seroit, comme si on disoit, que $\frac{\sqrt{2}}{1}$ ou $\sqrt{2} = \frac{1}{2}$ log. 2, ou en general, que $\frac{a}{b} = la - lb$. Aber wer hat das letztere jemahls behauptet, und wie kann Herr d'Alembert dem Satz des

Hrn.

Hrn. Cotes: die Logarithmen verhalten sich, wie die mit ihnen zusammen gehörigen Verhältnisse, einen solchen Sinn unterlegen? Wenn man behauptet, daß die Kreisbogen Maaße der dazu gehörigen Winkel am Mittelpunct sind, behauptet man damit, daß jeder Bogen dem dazu gehörigen Winkel gleich sey? Wenn ein Winkel = 1 gesetzt wird, und der dazu gehörige mit einem bekannten Halbmesser beschriebene Bogen auch; so ist die Zahl, welche jeden andern Winkel aus dem für Eins angenommenen Maaßwinkel ausdrückt, eben so groß als die Zahl, welche den dazu gehörigen mit eben dem Halbmesser beschriebenen Bogen aus dem für Eins angenommenen Kreisbogen ausdrückt. Eben diesen und keinen andern Sinn hat der Cotesische Satz: die Logarithmen sind Maaße der dazu gehörigen Verhältnisse. Nimmt man ein Verhältniß als Maaßverhältniß an, um die Grösse aller übrigen gegen dieses Verhältniß zu bestimmen, und setzt man den Logarithmen des Maaßverhältnisses = 1; so ist jedes andre Verhältniß gegen das Maaßverhältniß so groß, als der dazu gehörige Logarithme gegen Eins.

20. §.

Wie soll man sich nun die weiter folgende Stelle erklären?

Il est vrai que plusieurs Géometres, entr' autres M. Cotes, ont regardé les Logarithmes comme la mesure des rapports; mais par cette expression (qu' on auroit tout aussi-bien fait de ne pas adopter) ils n' ont apparemment voulu dire autre chose si non que les rapports étant égaux, les Logarithmes sont égaux, et nullement que le Logarithme d' un rapport peut être pris pour le rapport meme.

Der Logarithme eines Verhältnisses kann in eben dem Sinne für das Verhältniß selbst angenommen werden, in welchem der aus der Spitze eines Winkels zwischen seinen

Schenkeln beschriebene Kreisbogen für den Winkel selbst angenommen werden kann. Es scheint, daß die schöne Theorie von Zusammensetzung und Theilung der Verhältnisse, wovon doch beym Euklides im V. Buch 10. 11. Def. und VI. Buch 5. Def. die ersten Gründe vorkommen, die Stifelius in seiner Arithmetica integra, wie ich es oben im 13. § bemerkt habe, in grosser Allgemeinheit sehr meisterhaft vorträgt, dem H. d'Alembert wenig oder gar nicht bekannt gewesen sey: denn er betrachtet die Vergleichung der Verhältnisse als Verhältnisse, und die Vergleichung ihrer Exponenten als einerley Sache. Das leuchtet ganz ungemein deutlich aus den nachstehenden Behauptungen hervor, welche a. a. O. 200. S. gleich nach der vorhin angeführten Stelle folgen.

En effet le cas de l'egalité des rapports est le seul, ou les logarithmes soient entr'eux comme les rapports. Ainsi on peut dire, que le logarithme de $\frac{1}{2}$ est a celui de $\frac{2}{4}$ comme $\frac{1}{2}$ èst a $\frac{2}{4}$, mais on ne dira jamais, qu'en tout autre cas $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = la - lb : lc - ld$. Versteht man durch $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ die Quotienten, welche gefunden werden, wenn a mit b, und c mit d dividirt wird; so ist es allerdings falsch, daß $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = la - lb : lc - ld$ sey: das hat aber weder Herr Cotes, noch sonst irgend ein anderer Geometer je behauptet. Wer könnte wohl auf die Gedanken kommen, daß im briggischen System $\frac{10}{1} : \frac{100}{1} = 1 : 2$ sey, wenn $\frac{10}{1}$ die Zahl 10 und $\frac{100}{1}$ die Zahl 100 bedeuten soll. Die ganze Sache wird hoffentlich durch folgende Betrachtung in ihr völliges Licht gesetzet, und die von Hrn. Cotes eingeführte Redensart von allem Zweifel befreyet werden können.

21. §.

21. §.

Der Exponent eines Verhältnisses, oder der Quotient, welcher gefunden wird, wenn man ein Glied mit dem andern dividirt, drückt keinesweges die Grösse des Verhältnisses, sondern vielmehr die Grösse des einen Gliedes gegen das andere aus. Die Zahl 15 mit 3 dividirt giebt den Quotienten 5, und diese Zahl 5 ist der Exponent des Verhältnisses 15:3, oder wie man es auch schreibt $\frac{15}{3}$. Demnach ist zwar der Bruch $\frac{15}{3} = 5$, und 15 ist gegen 3 so groß, als 5 gegen 1: aber keinesweges heißt das eben so viel, als wenn man sagt, das Verhältniß 15:3 sey $= 5$. Bekanntermaßen kann man nie angeben, wie groß eine Sache sey, wenn man sie nicht mit einer andern vergleicht, die mit ihr von einerley Art ist, und deren Grösse als bekannt voraus gesetzt wird. Man kann nur angeben, wie groß eine Sache gegen eine andere sey, deren Grösse man schon kennet, nicht aber, wie groß sie für sich betrachtet sey. Die Frage, wie lang eine Elle sey? läßt sich nicht beantworten, wofern man nicht etwa sagen will, eine Elle sey 2 Fuß, oder 24 Zoll lang; dadurch aber wird nicht angegeben, wie groß eine Elle für sich betrachtet, sondern wie lang sie gegen die Länge eines Fusses oder eines Zolles sey. Wer nicht weiß, wie lang ein Fuß, wie lang ein Zoll sey, der ist noch nicht befriediget, wenn man ihm sagt, eine Elle sey 2 Fuß oder 24 Zoll lang; er ist genöthiget weiter zu fragen: wie lang denn ein Fuß? wie lang ein Zoll sey? Man mag antworten, was man will, so werden ähnliche Fragen wiederhohlt werden, bis man zuletzt auf eine Länge kommt, die der Fragende kennet, oder bis man ihm sinnlich zeigt, wie lang diejenige Länge sey, womit man die Vergleichung zuletzt angestellet hatte. Auf die Frage, wie groß das Verhältniß a:b sey? kann man eben so wenig antworten, wofern man nicht dieses Verhältniß mit einem andern bekannten vergleicht und alsdenn angiebt, wie groß das Verhältniß a:b gegen das ange-

nommene Maaßverhältniß sey. Die Frage aber: wie groß a gegen b sey? ist von der vorigen Frage sehr unterschieden: auf diese letzte Frage wird die Antwort gefunden, wenn man a mit b dividirt. So groß als der Quotient $\frac{a}{b}$ oder der Bruch $\frac{a}{b}$ gegen 1 ist, so groß ist a gegen b.

Das ist es aber gar nicht, was man wissen will, wenn gefragt wird, wie groß das Verhältniß a : b sey? Diese Frage beantwortet der Logarithme des Verhältnisses: das Verhältniß a:b ist gegen das Maaßverhältniß so groß, als la — lb gegen Eins, auch ist eben so das Verhältniß c:d gegen das Maaßverhältniß so groß, als lc — ld gegen Eins. Aus beyden Proportionen

das Verh. $\frac{a}{b}$: Maaßverh. = la — lb : 1,

das Maaßverh. : Verh. $\frac{c}{d}$ = 1 : lc — ld,

folgt die dritte: das Verh. $\frac{a}{b}$: Verh. $\frac{c}{d}$ = la — lb : lc — ld. Das heißt aber nicht soviel, der Exponent des Verh. $\frac{a}{b}$ verhalte sich gegen den Exponenten des Verh. $\frac{c}{d}$, wie la — lb : lc — ld; sondern der Sinn ist dieser: das Verh. $\frac{a}{b}$ lasse sich aus dem Verh. $\frac{c}{d}$, oder aus einem Theile desselben, eben so zusammen setzen, wie die Zahl la — lb aus der Zahl lc — ld, oder einem ähnlichen aliquoten Theile dieser Zahl, zusammen gesetzt werden kann. H. d'Alembert bemerkt es selbst, (a. a. O. 201. S.) das Herr von Leibnitz bey Gelegenheit seines Streits mit dem

dem Hrn. Bernoulli die Anmerkung gemacht habe, man müsse die Brüche mit den Verhältnissen nicht schlechthin für einerley halten. Daß es hiemit seine völlige Richtigkeit habe, beweiset die bisherige Ausführung, wenn gleich H. d'Alembert hinzu setzet, daß er weder das Gewicht dieser Bemerkung einsehe, noch von ihrer Wahrheit überzeuget sey.

22. §.

Weil es keine Logarithmen einzeln gesetzter Zahlen, oder einzeln gesetzter Grössen giebt, sondern allemahl der Logarithme des Verhältnisses dieser Zahl oder Grösse gegen Eins gemeint ist; (16. §.) so ergiebt sich daraus der eigentliche Sinn der Frage: ob der Logarithme einer negativen Grösse, wie — a, eine mögliche Grösse sey? Bey allen algebraischen Rechnungen ist das, was man für Eins annimmt, eine positive Grösse: (III. Abhandl. 17. §.) also will man wissen, ob der Logarithme des Verhältnisses — a : + 1 eine mögliche Grösse sey? Ich will der Kürze wegen solche Verhältnisse, deren Glieder nicht entgegen gesetzt sind, wie + a : + b, oder — a : — b positive, diejenigen aber, deren Glieder einander entgegen gesetzt sind, wie + a : — b, oder — a : + b, negative Verhältnisse nennen, weil jene einen positiven, diese einen negativen Exponenten haben. Der Umstand, daß beyde Glieder des negativen Verhältnisses einander entgegen gesetzt sind, bringt in den Begriff des Verhältnisses etwas hinein, was nicht eigentlich hinein gehört, (III. Abhandl. 15. §.) worauf aber bey algebraischen Rechnungen nothwendig Rücksicht genommen werden muß. Wenn sonst die Zahl der Theile vorgeschrieben ist, so kann man ein gegebenes Ganzes nur auf einerley Art in die verlangte Anzahl gleicher Theile eintheilen, und die Theile sind mit dem Ganzen von einerley Natur. Eben das ist auch der Fall, wenn man ein Verhältniß theilen soll, wobey nur die

Grösse der Glieder gegen einander, der Umstand aber gar nicht in Betrachtung kommt, ob diese einander entgegen gesetzt sind, oder nicht. Ganz anders ist der Fall, wenn die Glieder des Verhältnisses als algebraische Grössen betrachtet werden müssen: nun ist nicht allein $+\sqrt{b}:+1$, sondern auch $-\sqrt{b}:+1$ die Hälfte des Verhältnisses $+b:+1$, denn beyde Proportionen $+1:+\sqrt{b} = +\sqrt{b}:+b$ und $+1:-\sqrt{b} = -\sqrt{b}:+b$ sind algebraisch richtig: dagegen läßt sich das Verhältniß $-b:+1$ gar nicht in zwey mögliche Hälften theilen. Wenn nur die Grösse beyder Glieder gegen einander in Betrachtung kommt; so sind alle Verhältnisse als positiv anzusehen, und alsdenn läßt sich jedes Verhältniß aus jedem andern zusammen setzen. Es wird nämlich entweder das eine Verhältniß ganz, oder doch ein Theil desselben, in dem andern mehrere mahl enthalten seyn, wenn man nemlich bey der Theilung jenes Verhältnisses auch, wofern es nöthig ist, bis auf Elementarverhältnisse fort gehet: dagegen kann man nicht jedes negative Verhältniß aus einem positiven, und umgekehrt nicht jedes positive aus einem negativen Verhältnisse zusammen setzen. Die beyden Verhältnisse $+b:+1$ und $-b^{2m}:+1$ sind so beschaffen, daß das letztere aus dem ersten sich gar nicht zusammen setzen läßt, und man kann die Grösse des Verhältnisses $-b^{2m}:+1$ gegen das Verhältniß $+b:+1$ gewiß durch keine mögliche Zahl ausdrücken. Wäre das Verhältniß $(-b^{2m}:+1)$: Verh. $(+b:+1) = \lambda:1$; so müßte $(-b^{2m}:+1) = (+b:+1)^{\lambda}$ seyn. Man setze aber statt λ eine mögliche Zahl, welche man will, so wird dieser Gleichung nie ein Genüge geschehen können: deswegen kann λ keine mögliche Zahl seyn. Eben so erhellet, daß sich das Verhältniß $+b^{2m+1}:+1$ aus dem Verhältniß $-b:+1$ gar nicht zusammen setzen lasse.

23. §.

Der Exponent eines Verhältnisses bestimmt nur die relative Grösse des vorhergehenden Gliedes gegen das nachfolgende: die absolute Grösse des erstern wird allererst bestimmt, wenn ausser dem Exponenten auch die absolute Grösse des nachfolgenden Gliedes gegeben ist. Auf eine ganz ähnliche Art bestimmet der Logarithme eines Verhältnisses die relative Grösse desselben gegen das Maaßverhältniß. Man setze voraus, das nachfolgende Glied eines Verhältnisses sey eine gegebene unveränderliche Grösse a, das vorhergehende Glied aber eine veränderliche Grösse x; so wird das Verhältniß x:a mit x zugleich wachsen oder abnehmen, so lange $x > a$ bleibt. Es kann aber nie kleiner werden, als es in dem Fall $x = a$ ist: denn das Verhältniß wächst von neuen, wenn $x < a$ wird, auf eine der vorigen entgegen gesetzte Art. Auch darüber findet man schon scharfsinnige Bemerkungen bey den ältern Algebraisten vor Einführung des Nahmens und des Gebrauchs der Logarithmen. Ein Verhältniß wie a:a hieß ratio (oder wie Stiefel redet proportio) aequalitatis, ein Verhältniß wie x:a aber ratio majoris oder minoris inaequalitatis, nachdem $x > a$ oder $x < a$ angenommen wird. Man bemerkte dabey, daß Verhältnisse der grössern und kleinern Ungleichheit in der Zusammensetzung einander vermindern, und wenn sie für sich nur in umgekehrter Ordnung gleich sind, einander aufheben. Daraus schloß man, das Verhältniß der Gleichheit sey die Gränze zwischen beyden. M. s. Stifelii Arithm. Int. Lib. I. Cap. VI. pag. 47. verglichen mit pag. 52. 53. An der zuletzt angeführten Stelle findet sich die Bemerkung:

> Quando proportiones ex subtractione mutant genus, hoc signum est, subtrahendam proportionem fuisse majorem ea, a qua facta est subtractio.

Vom Verhältniß 8:1
subtrahire man 16:1

so ist der Rest 8:16 oder 1:2.

Wenn sonst das grössere von kleinern subtrahirt wird, so ist der Rest das entgegen gesetzte dessen, was gefunden wird, wenn man das kleinere vom grössern subtrahirt. Hier aber würde 8:1 von 16:1 subtrahirt den Rest 2:1 geben: also muß 1:2 dem Verhältnisse 2:1 entgegen gesetzt seyn. Wenn also aus einem veränderlichen Verhältnisse das Verhältniß der Gleichheit wird, so muß es gar keine Grösse mehr haben: es befindet sich nun in der Gränze zwischen den beyden Zuständen, welche sonst bey algebraischen Rechnungen durch die Zeichen + und (—) von einander unterschieden werden. Eben dasselbe ist den bekanntesten Lehrsätzen von den Logarithmen gemäß. Wenn wir $l1 = 0$ setzen, so heißt das, es sey $l(1:1)$ oder $l(a:a) = 0$, was auch a seyn mag. Wir setzen $l\frac{1}{4} = -l4$, das heißt, es sey $l(1:4) = -l(4:1)$.

24. §.

Wie aber, wenn das veränderliche Glied x in dem Verhältnisse x:a nicht allein bis auf 0 abnähme, sondern auch in den entgegen gesetzten Zustand übergienge: was wäre nun $l(-x:+a)$, oder welches einerley ist $l(-\frac{x}{a}:+1)$? Eine nöthige Bemerkung hiebey ist diese, daß man ein Verhältniß wie —x:+a nicht so ansehen könne, als wäre es dem Verhältnisse +x:+a entgegen gesetzt: nur die Grösse x wird der Grösse a entgegen gesetzt, wenn x ein Zeichen erhält, das dem vor a befindlichen Zeichen entgegen gesetzt ist. Sonst müssen entgegen gesetzte Grössen an sich gleichartig, und so beschaffen seyn, daß sie in der Zusammensetzung einander vermindern, also einander aufheben, wenn sie an sich ohne auf die Ent-

gegen-

gegensetzung zu sehen, einander gleich sind. Wenn man aber einerley x verstehet

und mit dem Verhältnisse $+x : +a$

das Verhältniß $-x : +a$

zusammensetzt; so erhält man $-x^2 : +a^2$, welches nie ein Verhältniß der Gleichheit ist, auch alsdenn nicht, wenn $x = a$ wäre. Dagegen sind vermöge des 23. §.

$+x : +a$, oder auch $-x : -a$

$+a : +x$ $-a : -x$

entgegen gesetzte Verhältnisse: ihre Summe ist $+ax : +ax = 1 : 1$, und das allemahl, wie groß auch x angenommen wird.

25. §.

Das Verhältniß $-x^2 : +a^2$ erhält man zwar nach der gewöhnlichen Regel, und selbst nach Euklids VI. Buch 5 Erkl. so wie diese in den meisten lateinischen Uebersetzungen lautet. *Ratio ex rationibus componi* dicitur, quando rationum quantitates, inter se multiplicatae, illius faciunt quantitatem, (aliquam rationem effecerint.) Wenn man aber auf die Anwendungen Rücksicht nimmt, welche Euklides selbst von dieser Erklärung macht; (VI. B. 23. Satz) so scheint die Uebersetzung des H Lorenz dem eigentlichen Sinne Euklids gemässer, und die gewöhnliche Uebersetzung mehr ein Folgerungssatz aus der Erklärung, als die Erklärung selbst zu seyn, welche nach H. Lorenz so lautet.

> Wenn zwey oder mehrere Verhältnisse so beschaffen sind, daß immer das Hinterglied einer vorhergehenden das Forderglied der nächstfolgenden ist: so ist die Verhältniß des Fordergliedes der ersten zum Hintergliede der letzten aus allen diesen Verhältnissen, oder solchen, die ihnen gleich sind, zusammengesetzt.

Nimmt man diese Erklärung, welche nun mit der 10 und 11. Erkl. im V. Buch besser zusammenhängt, und diese beyde als besondre Fälle unter sich begreift, zum Grunde; so würde man ein Verhältniß aus $+x : +a$ und $-x : +a$

auch zusammensetzen, wenn man ansetzte: $-x:+a = +a:-\frac{aa}{x}$. So erhält man die Reihe

$$+x\ ;\ +a\ ;\ -\frac{aa}{x}\ ;$$

und das Verhältniß $+x:-\frac{aa}{x}$ ist mit dem vorhin (24. §.) gefundenen $-x^2:+a^2 = +x^2:-a^2$ einerley. Wenn aber das x in beyden Verhältnissen $+x:+a$ und $-x:+a$ einerley ist; so leuchtet es aufs vollkommenste ein, daß ein so gefundenes Verhältniß wie $+x:-\frac{aa}{x}$ nicht als eine ratio duplicata angesehen werden könne, weil die beyden Theile $+x:+a$, und $+a:-\frac{xx}{a}$ nicht algebraisch gleiche Verhältnisse sind.

26. §.

Aus eben demselben Grunde, weil ein positives und ein negatives Verhältniß nie gleich groß seyn können, folgt, daß in einer geometrischen Progression entweder alle Verhältnisse positiv, oder alle Verhältnisse negativ seyn müssen. Wollte man ein negatives Verhältniß, als Maaßverhältniß, oder welches einerley ist, wollte man eine negative Zahl als Grundzahl eines Logarithmensystems annehmen, so würde man weder alle positive noch alle negative Verhältnisse damit vergleichen können. Mit dem Verhältnisse $-16:+1$ läßt sich weder $+4:+1$ noch $-4:+1$ vergleichen, weder das eine noch das andre ist die Hälfte des Maaßverhältnisses $-16:+1$. Wenn die Grundzahl des Systems, oder das Maaßverhältniß positiv ist, so kann man zwar alle positive Verhältnisse,

aber nicht alle negative Verhältnisse damit vergleichen. Soll $+b:+1$ das Maaßverhältniß seyn, so kann man jedes andre positive Verhältniß $+x:1 = (+b)^{\frac{m}{n}} : +1$, oder welches einerley ist die Zahl $+x = (+b)^{\frac{m}{n}}$ setzen. Nun mag n eine grade oder eine ungrade Zahl seyn, so hat doch $(+b)^{\frac{m}{n}}$ allemahl einen möglichen positiven Werth, und wenn dieser gewählt wird, so ist auch $(+b)^{\frac{m}{n}}$ positiv.

Dagegen kann man der Gleichung $-x = (+b)^{\frac{m}{n}}$, nie ein Genüge leisten, wenn n eine ungrade Zahl ist.

27. §.

Es bleibe nun bey der Voraussetzung, daß die Grundzahl des Systems b positiv angenommen sey, wie denn auch diese Voraussetzung bey den beyden bekanntesten Systemen, beym natürlichen und Briggischen System, und überhaupt bey jedem System zum Grunde liegt, welches vom natürlichen System nach einem möglichen beständigen Modulus abhängt. Hiemit ist also das Maaßverhältniß $+b:+1$ gegeben, zugleich sind alle andre Verhältnisse gegeben, die aus dem Verhältnisse $b:1$ nach einem ganzen Exponenten, oder auch nach einem solchen gebrochenen Exponenten zusammengesetzt werden können, dessen Nenner eine ungrade Zahl ist: und diese sind nun insgesammt positive Verhältnisse. Nur alsdenn, wenn der Nenner des gebrochenen Exponenten eine grade Zahl ist, tritt die Zweydeutigkeit der algebraischen Wurzelgrössen ein, und es ist nicht gleichgültig, welche von beyden Wurzeln man in das System bringen will. Es sey n eine grade Zahl und $b^{\frac{1}{n}} = \pm a$. Wenn nun $1+a^2 = p$ ist, so

ist

ist noch nicht bestimmt, ob $l+a=\frac{1}{2}p$, oder $l-a=\frac{1}{2}p$ seyn soll, denn es ist so gut $+a:+1$ als auch $-a:+1$ die algebraische Hälfte des Verhältnisses $+a^2:+1$. Jede von diesen beyden Voraussetzungen bestimmt ein eigenes Logarithmensystem, welches von demjenigen verschieden ist, das die andre Voraussetzung bestimmt: denn es ist eine feststehende Grundregel, daß in einerley System nur gleiche Verhältnisse gleiche Logarithmen haben. Die Verhältnisse $+a:+1$ und $-a:+1$ sind ungleich, also müssen in einerley System ihre Logarithmen ungleich seyn.

28. §.

In einem und eben demselben System können die Logarithmen einer positiven, und der ihr entgegen gesetzten sonst aber eben so grossen negativen Zahl nicht beyde zugleich möglich seyn. Es sey $l+x:l-x=1:\lambda$, so muß $l-x=\lambda.l+x$, mithin ferner $-x=(+x)^{\lambda}$ seyn. Es giebt aber keine mögliche Zahl, die man anstatt λ setzen könnte, um beyde Glieder dieser Gleichung einander gleich zu machen: demnach ist λ eine unmögliche Zahl, und eben darum auch $l-x=\lambda.l+x$, wenn $l+x$ eine mögliche Zahl ist. Wäre dagegen $l-x$ eine mögliche Zahl, so würde in demselben System $l+x=\frac{1}{\lambda}.l-x$ eine unmögliche Zahl seyn.

Hiemit wird es also aufs vollkommenste bestättiget, daß die beyden Voraussetzungen $l+a=\frac{1}{2}p$, und $l-a=\frac{1}{2}p$ (27. §.) zwey von einander ganz verschiedene Logarithmensysteme geben müssen. Man nehme $l+a=\frac{1}{2}p$, so ist

das 1. System

die Zahlen

$1 \quad +a \quad +a^2 \quad +a^3 \quad +a^4 \quad +a^5 \ldots$

die

die Logarithmen

0 $\frac{1}{2}$P P $\frac{3}{2}$P 2P $\frac{5}{2}$P ....

Setzt man dagegen $1-a=\frac{1}{2}P$, so ist

das 2. System

die Zahlen

$1 \quad -a \quad +a^2 \quad -a^3 \quad +a^4 \quad -a^5$ ....

die Logarithmen

0 $\frac{1}{2}$P P $\frac{3}{2}$P 2P $\frac{5}{2}$P ....

Im 2. System sind $1-a$, $1-a^3$, und überhaupt $1-a^{2m+1}$ mögliche Zahlen, aber die Logarithmen eben dieser Zahlen sind im 1. System unmöglich: dagegen sind im 2. System $1-a^2$, $1-a^4$, und überhaupt $1-a^{2m}$ unmöglich. Wenn also gleich in einem gewissen System mehrere negative Zahlen mögliche Logarithmen haben können; so folgt daraus noch nicht, daß die Logarithmen aller negativen Zahlen in eben diesem System möglich sind.

29. §.

Man weiß, daß viele sonst allgemeine Lehren, welche die Vergleichung der Grössen nur als Grössen betrachtet angehen, nicht mehr ohne alle Einschränkung ihre Anwendung finden können, wenn der Unterschied positiver und negativer Grössen in Betrachtung gezogen werden muß. Dieserwegen würde man auch die sonst allgemein richtigen Lehren von solchen Logarithmen, die zu verschiedenen Systemen gehören, bey Vergleichung zweyer Systeme von der Art, wie sie im 28. §. sind betrachtet worden, nicht mehr anwenden können. Wenn sonst in verschiedenen Systemen die zu einerley Zahl gehörigen Logarithmen durchgängig ungleich sind, so sind sie es bey Systemen, wie die im 28. §. betrachteten waren, nicht durchgängig. Die Zahlen a^2, a^4, und überhaupt a^{2m} haben einerley Logarithmen. Sonst hängen die Logarith-

men

men verschiedener Systeme nach einem beständigen Modulo von einander ab, und solche Logarithmen, die zu einerley Zahl gehören, verhalten sich in verschiedenen Systemen, wie die Moduli: das hat den Grund, weil das Maaßverhältniß nur auf einerley Art in zwo Hälften, in vier Viertel, u. s. f. eingetheilet werden kann, wenn an die negativen Verhältnisse gar nicht gedacht wird. Wenn daher ein anderes Verhältniß, als vorher, für die Hälfte, den vierten Theil, u. s. f. des Ganzen genommen wird; so muß auch nothwendig das jetzige Ganze ein anders als das Vorige seyn. Ist vorher $la^2 = \frac{1}{2}$ gewesen, so war $la^4 = 1$: nimmt man anstatt dessen $la = \frac{1}{2}$, so wird $la^2 = 1$. Man kann keine Aenderung von dieser Art vornehmen, ohne zugleich die Grnndzahl, und hiemit die Logarithmen aller übrigen Zahlen zu ändern. Wenn man dagegen anstatt der ersten Voraussetzung $1 + a = \frac{1}{2}a$ die zweyte $1 - a = \frac{1}{2}$ annimmt; so bleibt das Ganze eben dasselbe, und es ändern sich nicht von allen Zahlen die Logarithmen.

30. §.

Wenn es festgesetzt ist, wie groß die Grundzahl b des Systems seyn soll; so könnte man zuerst $b^{\frac{1}{n}}$ suchen, und hiernächst die Zahlen $b^{\frac{m}{n}}$, indem man nach und nach $m = 2$, $m = 3$, $m = 4$, u. s. f. setzte: mit den Zahlen $b^{\frac{1}{n}}$, $b^{\frac{2}{n}}$, $b^{\frac{3}{n}}$, $b^{\frac{4}{n}}$, ... $b^{\frac{m}{n}}$, würden alsdenn die Logarithmen $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$, $\frac{4}{n}$, ... $\frac{m}{n}$, zusammen gehören. Wählte man für n eine ungrade Zahl, so könnte gar keine Zweydeutigkeit eintreten, alle so gefundenen Zahlen $b^{\frac{m}{n}}$ würden positiv seyn, weil b positiv angenommen ist,

ist, und die Logarithmen aller ihnen entgegen gesetzten negativen Zahlen würden unmöglich seyn. (28. §.) Anstatt dessen, daß man $b^{\frac{1}{n}}$ aus b sucht, kann man auch umgekehrt b^{n} willkührlich annehmen, und daraus b suchen. Weil diese erste Bestimmung völlig willkührlich ist, so kann man für b^{n} eine Rationalzahl annehmen, und $b^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}$ setzen, da dann $b = (1 + \frac{1}{n})^{n}$ seyn muß: also

$$\text{so } b = 1 + 1 + \frac{n.n-1}{2.n^2} + \frac{n.n-1.n-2}{2.3.n^3} + \ldots\ldots$$

Je grösser man n annimmt, desto näher kommt $b^{\frac{1}{n}}$ der Gränze 1, und zugleich b der Gränze $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots\ldots = 2{,}718281\ldots\ldots$ Wird diese Gränze $= \beta$ gesetzt, so weiß man, daß β die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems sey.

31. §.

Aus der Gleichung $x = b^{\frac{m}{n}}$ hat man $x = (1 + \frac{1}{n})^{m}$, also

$$x = 1 + m.\frac{1}{n} + \frac{m.m-1}{1.2}.\frac{1}{n^2} + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}.\frac{1}{n^3} + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}.\frac{1}{n^4} + \ldots\ldots$$

und zugleich ist $lx = \frac{m}{n}$. Aus der Gleichung $x = (1 + \frac{1}{n})^{m}$ erhält man ferner $x^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{n}$, also $\frac{1}{n} = x^{\frac{1}{m}}$

$x^{\frac{1}{m}} - 1$, mithin $lx = \frac{m}{n} = m(x^{\frac{1}{m}} - 1)$. Weil nun β als die Gränze des Werthes b die Grundzahl seyn soll, so muß für x die Gränze der Reihe $1 + m.\frac{1}{n} + \frac{m.m-1}{1.2}.\frac{1}{n^2} + \ldots$. und für lx die Gränze des Werthes $\frac{m}{n}$ genommen werden. Es sey also die Gränze $\frac{m}{n} = y$, so erhält man

$$x = 1 + y + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \ldots = \beta^y.$$

Um auch umgekehrt y zu finden, wenn x gegeben ist, setze man $x = 1 + z$, so erhält man $m(x^{\frac{1}{m}} - 1) = z + (\frac{1}{m}.\frac{1}{m} - 1)\frac{mz^2}{1.2} + (\frac{1}{m}.\frac{1}{m} - 1.\frac{1}{m} - 2)\frac{mz^3}{1.2.3} + \ldots$ und die Gränze dieser Reihe ist das gesuchte y, mithin $y = l(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{5}z^5 - \ldots$.

32. §.

Diese Rechnung gründet sich schlechthin auf die Voraussetzung, daß $x^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{n} = b^{\frac{1}{n}}$ allemahl positiv bleiben müsse, wenn auch m oder n eine grade Zahl vorstellen sollte. Ueberdem soll $+1$ und nicht -1 die Gränze beyder Werthe $x^{\frac{1}{m}}$ und $b^{\frac{1}{n}}$ seyn, und hiemit wird zugleich festgesetzt, daß jede Zahl $x = (1 + \frac{1}{n})^m$, womit der Logarithme $y = \frac{m}{n} = m(x^{\frac{1}{m}} - 1)$ zusammengehört, eine

posi-

positive Zahl sey. Unter der Gränze des Werths $x = (1 + \frac{1}{n})^m$ sind alle mögliche positive Zahlen begriffen, weil auch $\frac{m}{n}$ negativ seyn kann; also findet man vermittelst dieser Rechnung für jede mögliche positive Zahl einen möglichen Logarithmen, der die Gränze des Werthes $m(x^{\frac{1}{m}} - 1)$ ist. Daraus ergiebt sich die fernere Folge, daß im natürlichen Logarithmensystem gar keine negative Zahl einen möglichen Logarithmen haben könne. (28. §.) Demnach giebt es auch im Briggischen, und überhaupt in jedem andern System, welches vom natürlichen nach einem möglichen beständigen Modulus abhängt, für negative Zahlen keine mögliche Logarithmen.

33. §.

Die Mannigfaltigkeit der algebraischen Wurzelgrössen hat indessen doch noch auf eine andre Art auf solche algebraische Rechnungen Einfluß, wobey logarithmische Functionen vorkommen. Jede Wurzelgrösse, wie $x^{\frac{1}{m}}$ hat eigentlich m algebraische Werthe, obgleich nie mehr als zwey mögliche, vielleicht nur einen möglichen Werth, nachdem m eine grade, oder eine ungrade Zahl vorstellet. Nun war $lx = m(x^{\frac{1}{m}} - 1)$, (31. §.) also muß es für lx überhaupt betrachtet m algebraische Werthe geben, wenn gleich vielleicht unter allen diesen Werthen nur einer, vielleicht bey gewissen Voraussetzungen gar keiner möglich ist. Weil jedoch im 27 §. schon bewiesen ist, daß zwey von einander ganz verschiedene Logarithmensysteme bestimmt werden, nachdem $b^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{m}}$ (31. 32. §.) eine positive, oder eine negative Wurzel vorstellen soll; so würde man auch nicht das natürliche, sondern ein vom natürlichen ganz

verschiedenes Logarithmensystem finden, wenn man $b^{\frac{1}{n}} = k^{\frac{1}{m}} = -1 - \frac{1}{n}$ setzen und für x die Gränze des Werthes $(-1-\frac{1}{n})^m$ annehmen wollte. So lange m und n bestimmte ganze Zahlen sind, würden diese Werthe wechselsweise negativ und positiv seyn, wenn die Zahlen 1, 2, 3, u. s. w. nach der Ordnung anstatt m gesetzt würden: also würde auch die Gränze dieses Werthes weder jede positive noch jede negative Zahl vorstellen können. Es soll aber x alle mögliche positive Zahlen vorstellen; der Voraussetzung gemäß soll $\frac{m}{n} = y = lx$, und wenn die Gränze des Werthes $\frac{m}{n}$ verstanden wird, soll $x = \beta^{\frac{m}{n}} = \beta^y$ seyn. Wenn also x um die Differenz dx wächst, so muß das $x + dx = \beta^{y+dy}$ geben, und es soll allemahl $\frac{x+dx}{x} = \frac{\beta^{y+dy}}{\beta^y} = 1 + \frac{1}{n}$ bleiben. Weil nun $\beta^{y+dy} = \beta^y . \beta^{dy}$ ist, $\beta^{dy} = \beta^{\frac{m}{n}} . \beta^{\frac{x}{n}}$ seyn muß, so ist $dy = \frac{1}{n}$, und es muß $\beta^{dy} = \beta^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}$ bleiben, also allemahl die Gränze dieses Werthes $= +1$. Wollte man $\frac{x+dx}{x} = \beta^{dy} = -\beta^{\frac{1}{n}} = -(1+\frac{1}{n})$, also auch die Gränze $\frac{x+dx}{x} = -1$ annehmen, so wäre die Gränze dieses Verhältnisses

ses kein Verhältniß der Gleichheit, und das wäre dem sonst bekannten Begriff einer veränderlichen Grösse, die sich nach dem Gesetz der Stetigkeit ändern soll, ganz zuwider.

34. §.

Jede unmögliche Zahl ist unter der allgemeinen Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ enthalten; (Anfangsgr. der Math. Anal. IX. Abschn. 231. §. 2. Zus.) auch kann eben diese Formul jede Zahl überhaupt vorstellen, weil man $\beta = 0$ setzen kann, da dann α eine mögliche Zahl vorstellet. Wird ferner $\alpha = c.\cos.\varphi$, $\beta = c.\sin.\varphi$ gesetzt, so hat man auch $\alpha + \beta\sqrt{-1} = c(\cos.\varphi + \sin.\varphi.\sqrt{-1})$, und jene beyden Gleichungen geben $\alpha\alpha + \beta\beta = cc$, $\sin.\varphi = \frac{\beta}{c} = \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha\alpha+\beta\beta)}}$, $\cos.\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha\alpha+\beta\beta)}}$. Aus der Gleichung $\alpha + \beta\sqrt{-1} = c(\cos.\varphi + \sin.\varphi.\sqrt{-1})$ findet man ferner $\sqrt[m]{(\alpha+\beta\sqrt{-1})} = c^{\frac{1}{m}}(\cos.\frac{\varphi}{n} + \sin.\frac{\varphi}{n}.\sqrt{-1})$ (Anfangsgr. der Math. Anal. IX. Abschn. 251. §) da dann $c^{\frac{1}{m}}$ nur die mögliche Wurzel der Ordnung m aus c vorstellet. Anstatt φ kann man hiernächst in diese Gleichung einen jeden Bogen setzen, der mit dem Sinus $\frac{\beta}{\sqrt{(\alpha\alpha+\beta\beta)}}$, und Cosinus $\frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha\alpha+\beta\beta)}}$, zusammengehört: so erhält man alle mögliche und unmögliche Werthe der Wurzelgrösse $\sqrt[m]{(\alpha+\beta\sqrt{-1})}$.

Soll man auf diese Art alle Wurzeln der Ordnung m aus einer möglichen Grösse α finden: so nehme man an, daß R überhaupt jede dieser Wurzeln bezeichne, und setze $\beta = 0$.

1. Wenn nun α positiv ist, so erhält man sin. $\varphi = 0$, cos. $\varphi = +1$, $c = \alpha$. Aber mit sin. $\varphi = 0$ und cos. $\varphi = +1$ gehören die Bogen $0.\pi$, 2π, 4π, 6π, ... $2k\pi$ zusammen: mithin erhält man $R = \alpha^{\frac{1}{m}}$ $(\cos. \frac{2k\pi}{m} \pm \sin. \frac{2k\pi}{m} . \sqrt{-1})$.

2. Wenn α negativ ist, und $\beta = 0$ bleibt, so bleibt zwar sin. $\varphi = 0$, aber man erhält cos. $\varphi = -1$, $c = \alpha$. Weil nun mit sin. $\varphi = 0$ und cos. $\varphi = -1$ die Bogen π, 3π, 5π, 7π, ... $(2k+1)\pi$, zusammen gehören; so findet man $R = \alpha^{\frac{1}{m}} (\cos. \frac{2k+1}{m}\pi \pm \sin. \frac{2k+1}{m}\pi . \sqrt{-1})$. Man kann in beyden Fällen dem unmöglichen Theil der Formul sowohl + als auch (—) voransetzen, weil beydes der zum Grunde gelegten Gleichung $\alpha + \beta\sqrt{-1} = c(\cos. \varphi + \sin. \varphi . \sqrt{-1})$ ein Genüge leistet, wenn $\beta = 0$ ist.

35. §.

Nun sey a eine gegebene positive Zahl, und l ihr natürlicher möglicher Logarithme, e aber die Grundzahl des natürlichen Systems, so hat man $a = e^l$. Ferner wird $l = m(a^{\frac{1}{m}} - 1)$, (31. §.) also $\frac{l}{m} = a^{\frac{1}{m}} - 1$, und $a^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{l}{m}$ ist der positive mögliche Werth von $a^{\frac{1}{m}}$. Nimmt man dagegen $la = p + q\sqrt{-1}$ an, so giebt das $a = e^{p+q\sqrt{-1}}$. Um abzukürzen setze man $p + q\sqrt{-1} = f$, und R bezeichne überhaupt jeden Werth $a^{\frac{1}{m}}$: so ist $R = 1 + \frac{f}{m}$. (Eben der Werth ist auch $= e^{\frac{f}{m}}$, und $e^{\frac{1}{m}}$

$e^{\frac{1}{m}} = (e^{\frac{1}{n}})^{\frac{m}{m}} = (1+\frac{1}{n})^{n:m} = 1+\frac{1}{m}$; also $a^{\frac{1}{m}} =$ $(1+\frac{1}{m})^{f}$, wenn $1+\frac{1}{m}$ die positive mögliche Wurzel der Ordnung m von e ist). Wenn diese Werthe in der allgemeinen Formul des 33. §. n. 1. gebraucht werden, wo anstatt α hier a, also anstatt $\alpha^{\frac{1}{m}}$ hier $1+\frac{l}{m}$, und anstatt R hier $1+\frac{f}{m}$ gesetzt werden muß; so erhält man

$$1+\frac{f}{m} = (1+\frac{l}{m})(\text{cos.}\frac{2k\pi}{m} \pm \text{sin.}\frac{2k\pi}{m}.\sqrt{-1}),$$

und für k setzt man nach einander 0, 1, 2, 3, u. s. f. Wäre nun m eine Zahl von bestimmter Grösse, so würde man, um alle Wurzeln zu erhalten bis auf $k = \frac{1}{2}m$ fortgehen müssen, und das würde die zweyte mögliche Wurzel $-(1+\frac{l}{m})$ geben. Wenn aber m über alle Gränzen wachsen soll, so muß sich die Formul auf beyden Seiten der Gränze 1 nähern: deßwegen kann die Zahl k nie so groß genommen werden, daß die Gränze $\frac{k}{m}$ einen endlichen Werth erhielte, mithin wird dadurch die Wurzel $-(1+\frac{l}{m})$ ganz ausgeschlossen. Die gefundene Gleichung giebt $\frac{f}{m} = (1+\frac{l}{m})(\text{cos.}\frac{2k\pi}{m} \pm (\text{sin.}\frac{2k\pi}{m})\sqrt{-1}) - 1$; $f = (1+\frac{l}{m})(m\,\text{cos.}\frac{2k\pi}{m} \pm m\,\text{sin.}$

$\pm m \sin. \frac{2k\pi}{m} . \sqrt{-1}) - m$, also auch $f = \Rightarrow$

$\pm m \sin. \frac{2k\pi}{m} . \sqrt{-1 - m(1 - \text{cof.} \frac{2k\pi}{m})}$

$+ l \times (\text{cof.} \frac{2k\pi}{m} \pm \sin. \frac{2k\pi}{m} . \sqrt{-1})$. Ferner ist $1 - \text{cof.} \frac{2k\pi}{m} = \text{sinv.} \frac{2k\pi}{m} = 2 (\sin. \frac{k\pi}{m})^2$, und das giebt $f = l \times (\text{cof.} \frac{2k\pi}{m} \pm \sin. \frac{2k\pi}{m} \sqrt{-1})$

$\pm m \sin. \frac{2k\pi}{m} . \sqrt{-1 - 2m (\sin. \frac{k\pi}{m})^2}$. Wird nun für m die Gränze ∞ gesetzt, so hat man $\text{cof.} \frac{2k\pi}{m} = 1$, $m \sin. \frac{2k\pi}{m} = 2k\pi$, $m \sin. \frac{k\pi}{m} = k\pi$, und es wird $f = l \pm 2k\pi \sqrt{-1}$ gefunden.

36. §.

Man setze auch $-n = e^{p+q\sqrt{-1}}$, oder $l - z = p + q\sqrt{-1} = f$: so hat man $f = m((-a)^{\frac{1}{m}} - 1)$ (30. §) also $1 + \frac{f}{m} = (-a)^{\frac{1}{m}}$. Nun kann man die allgemeine Formul des 33. §. n. 2 anwenden, und man muß statt α hier wiederum a, anstatt $\alpha^{\frac{1}{m}}$ hier $a^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{l}{m}$, und anstatt R hier $1 + \frac{f}{m}$ setzen: also erhält man $1 + \frac{f}{m} = (1 +$

$$= (1 + \frac{l}{m})(\text{cof.}\frac{(2k+1)\pi}{m} \pm \text{sin.}\frac{(2k+1)\pi}{m}.\sqrt{-1}),$$

und daraus ferner, wenn man eben die Art zu schliessen, wie im vor. §. anwendet, $f = l \pm (2k+1)\pi\sqrt{-1}$. Der Buchstab k bezeichnet auch hier jede noch zu bestimmende ganze Zahl, die o mit eingeschlossen.

Vergleicht man nun die Formul

$$f = l \pm 2k\pi\sqrt{-1}, \quad (35.\ §.)$$

mit der hier gefundenen

$$f = l \pm (2k+1)\pi\sqrt{-1};$$

so erhellet, daß auch die allgemeinste algebraische Rechnung dasjenige bestättige, was oben im 32. §. auf andre Art schon ist bewiesen worden. Für die positive Zahl $+a$ giebt die erste Formul einen, nicht mehrere mögliche Logarithmen; nur $k = o$ giebt $f = l$, alle andre für k gesetzte Zahlen geben was unmögliches. Für die negative Zahl $-a$ giebt die zweyte Formul gar keinen möglichen Logarithmen, es mag $k = o$ gesetzt, oder jede andre Zahl, welche man will, für k angenommen werden. Im natürlichen System haben demnach alle positive Zahlen einen möglichen Logarithmen: die negativen Zahlen aber haben gar keinen möglichen Logarithmen. Wenn $a = e$ ist, so hat man $l = 1$, und für $+e$ wird $f = 1 \pm 2k\pi\sqrt{-1}$,

demnach sind die unmöglichen Werthe der Gränze $e^{\frac{1}{n}}$

$= (e^{\frac{1}{n}})^f$ insgesammt unter der Formul $(1 + \frac{1}{n})^{1 \pm 2\pi k\sqrt{-1}}$

enthalten. Das System bleibt unverändert, so lange $l(1 + \frac{1}{n})^m = \frac{m}{n}$ bleibt. Setzt man die Gränze $\frac{m}{n} = y$, wie im 30. §., so ist $\frac{1}{n} = \frac{y}{m}$, und $l(1 + \frac{y}{m})^m = y$,

$= y$, also auch $l(1 + \frac{f}{m})^m = f$, und die Gränze $(1 + \frac{f}{m})^m$ kann jede gegebene Zahl vorstellen, der Mannigfaltigkeit der Werthe f ungeachtet.

37. §.

Wenn eine mathematische Theorie auf ganz deutlich einleuchtenden und sichern Gründen beruhet, und wenn sich bey dem allen doch Schriftsteller finden, welche solche Behauptungen vortragen, die mit der Theorie nicht bestehen können; so darf man wohl ziemlich zuversichtlich behaupten, daß fehlsame, oder fehlsam angewandte, oder wenigstens mißverstandene Grundbegriffe, vielleicht mißverstandene oder fehlsam angewandte Rechnungsregeln auf fehlsame Schlußfolgen müssen geleitet haben. Ein merkwürdiges Beyspiel davon gaben die ehemahligen Behauptungen des H. Kühn, nach welchen die Wurzeln grader Exponenten aus negativen Grössen keine unmögliche sondern mögliche Grössen seyn sollten, die H. Kühn durch geometrische Constructionen darstellen wollte. (M. s. die vorstehende III. Abhandlung 56. u. f. §§.) Die Behauptungen der Herrn Bernoulli und d'Alembert sind den Kühnschen Behauptungen sehr ähnlich; es soll $l-a$ etwas mögliches seyn, ob man gleich eben so beweisen kann, daß es etwas unmögliches sey, wie man sich davon versichert, daß $\sqrt{-a^2}$ keine mögliche algebraische Zahl sey. Wäre $\sqrt{-a^2} = y$, so müste $y \times y = -a^2$ seyn: weil man aber keine mögliche Zahl anstatt y setzen kann, welche dieser Gleichung ein Genüge leistet; so muß y was unmögliches seyn. Auf eine völlig ähnliche Art erhellet, daß $l-a$ nichts mögliches seyn könne: (28. §.) es läßt sich daher fast gar nicht erklären, wie die Meinungen darüber so sehr haben getheilt seyn können. Wenigstens leitet es

auf

auf einen sehr gegründeten Verdacht, daß man die eigentliche Streitfrage bald in diesem bald in jenem Sinne müsse genommen haben. Weil H. d'Alembert in seiner oben im 7. §. schon angeführten Abhandlung ausser den ihm eigenen Gründen auch diejenigen, um seine Behauptungen zu bestättigen, wieder anwendet, welche H. Bernoulli gebraucht hatte; so werde ich bey der Beurtheilung dieser Gründe der gegenseitigen Meinung am besten der Ordnung, in welcher sie vom H. d'Alembert vorgetragen sind, folgen können.

38. §.

Zuerst findet man beym H. d'Alembert (a. a. O. 183. 184. S.) eine allgemeine Betrachtung, die er zwar für keinen eigentlichen Beweis ausgiebt, die aber dennoch dazu dienen soll, seine Meinung einigermaassen wahrscheinlich zu machen: sie ist diese. Wenn x eine algebraische Function von y ist, und zwar so, daß jedem Werth von y nur ein Werth von x zugehört, so muß in dieser Function die Grösse y unter keinem Wurzelzeichen enthalten seyn, das einen geraden Exponenten hat: alsdenn aber wird x nicht unmöglich, wenn y negativ ist. Nun sey $x = ly$, so setzt man nach Leibnitzens Lehre voraus, jedem y gehöre nur ein Werth von x zu: es sey aber $x = \infty$ für $y = \infty$, $x = -\infty$ für $y = 0$, und x werde unmöglich, wenn y negativ wird. Man könne zwar von der Beschaffenheit algebraischer Functionen auf die Beschaffenheit der transcendenten nicht schlechthin schliessen: allein es sey doch viel natürlicher, bey der Aehnlichkeit zu bleiben, und anzunehmen, daß wenn y negativ sey, auch x möglich bleibe, und negativ abnehme, so daß beyde Reihen diese werden.

Für y	sey x = ly
= − ∞	= + ∞
− 3	+ q
− 2	+ p
− 1½	− p
− 1	− r
− n	− s
− ½	− t
+ 0	+ u
+ 1	− r
+ 2	− p
+ 3	− q
+ ∞	+ ∞

Eine

Eine solche Art zu schliessen kann niemand, der im algebraischen Rechnungen geübt ist, gelten lassen: man muß es aus der Natur der Function beurtheilen, wie sich ihre Werthe ändern müssen, wenn die veränderliche Grösse, wovon sie abhängt, aus dem positiven in den negativen Zustand, oder umgekehrt übergeht, nicht nach ganz unbestimmten Vermuthungen, wie es vielleicht seyn könnte.

Gesetzt auch, daß man diese Aehnlichkeit beyzubehalten berechtiget wäre, so würde doch das gar nicht folgen, was Herr d'Alembert daraus schliessen will, daß es nemlich wahrscheinlich sey, man müsse $1+a = 1-a$ nehmen: man könnte eben so gut auch daraus schliessen, daß $1-a = -1+a$ genommen werden müsse. Es ist bekannt, wenn eine veränderliche Grösse positiv genommen bis zu $+\infty$ wächst, und ihre folgenden Werthe möglich bleiben, daß diese nicht nothwendig positiv sind, sondern negativ seyn können; auch umgekehrt, wenn diese Grösse negativ genommen bis zu $-\infty$ wächst, daß ihre folgenden Werthe, wenn sie möglich bleiben, nicht nothwendig negativ bleiben, sondern auch positiv werden können. Die Reihen könnten demnach auch so aussehen:

Für y =		sey x = ly =	
— ∞		— ∞	
⋮		⋮	
3	— q	— q	
2	— p	— p	
1½	—	—	
1	—	+ o	
1 − 1/n	—	+ p	
1	—	— r	
⋮		⋮	
0	— ∞	— ∞	
⋮		⋮	
1 − 1/n	+	+ r	
1	—	— r	
⋮		⋮	
½	—	— p	
1		o	
2	+	+ p	
3	+	+ q	
⋮		⋮	
∞	+	+ ∞	

Wäre also log. + 2 = + p, so könnte auch log. — 2 = — p seyn: demnach hat diese Art zu schliessen nicht das allergeringste Gewicht.

39. §.

39. §.

Auch bey einer nur vorläufigen Uebersicht der von beyden Seiten bey dieser Untersuchung gebrauchten Gründe und Gegengründe nimmt man sehr bald wahr, daß man wenig oder gar nicht Bedacht darauf genommen habe, den eigentlichen Sinn der Streitfrage (statum controuersiae) genau festzusetzen. Mehrere Zweydeutigkeiten der Frage: Ob die Logarithmen verneinter Grössen möglich sind? hat man gar nicht bemerkt, weil man nicht daran gedacht hat, daß der Logarithme einer Zahl eigentlich der Logarithme des Verhältnisses dieser Zahl zu Eins sey. Selbst alsdenn, wenn die Frage so vorgelegt wird: ob der Logarithme des Verhältnisses einer negativen Zahl zu Eins möglich sey? kann man alsdann allererst bestimmt antworten, wenn zugleich festgesetzt ist, ob die positive oder negative Einheit verstanden werden solle. Die Logarithmen der Verhältnisse negativer Zahlen zur negativen Einheit sind von den Logarithmen der Verhältnisse der entgegen gesetzten positiven Zahlen zur entgegen gesetzten positiven Einheit gar nicht verschieden: demnach sind allerdings die Logarithmen jener Verhältnisse eben so gut möglich als die Logarithmen dieser Verhältnisse. Die Gründe, welche die Herren Bernoulli und d'Alembert für ihre Behauptung anführen, sind zum Theil so beschaffen, daß sie nichts anders als eben dieses beweisen können; gleich der erste Beweis des Herrn d'Alembert (a. a. O. 185. Seite) gehört hieher.

En effet 1°, puisque les logarithmes repondans à une progression de nombres quelconque sont arbitraires, qui peut empecher de supposer, que les deux progressions

— 1 — 2 — 3 — 4 etc.
1 2 3 4 etc.

considerées comme des progressions *differentes* et *independantes* l'une de l'autre ont les memes logarithmes o, p, q, etc.

q, etc. Soll das so viel heissen: log. rat. $\frac{-1}{-1} = o$ $= \log. \text{rat.} \frac{+1}{+1}$; log. rat. $\frac{-2}{-1} = p = \log.$ rat. $\frac{+2}{+1}$; log. rat. $\frac{-3}{-1} = q = \log.$ rat. $\frac{+3}{+1}$, etc. so hindert nicht nur nichts, diese Voraussetzung anzunehmen, sondern es ist auch sogar nothwendig derselben beyzupflichten. Weil überhaupt $-n:-1 = +n:+1$, so ist $\log.(-n:-1) = \log.(+n:+1)$, das heißt der Logarithme des Verhältnisses einer negativen Zahl zur negativen Einheit ist völlig einerley mit dem Logarithmen des Verhältnisses eben der Zahl positiv genommen zur positiven Einheit. Man setzt aber bey allen algebraischen Rechnungen eine positive Einheit zum Grunde, und man darf diese Voraussetzung nie ändern: (III. Abhandl. 17. §.) wenn also vom Logarithmen einer negativen Zahl die Frage ist; so muß der Logarithme des Verhältnisses der negativen Zahl zur positiven Einheit verstanden werden. Der Exponent des Verhältnisses der negativen Zahl zur negativen Einheit ist ja auch keine negative sondern eine positive Zahl: demnach ist $l-1$ soviel als log. rat. $\frac{-1}{+1}$, und überhaupt $l-a$ soviel als log rat. $\frac{-a}{+1}$. In diesem Sinn sind im natürlichen System, und in allen übrigen, welche nach einem beständigen möglichen Modulus davon abhängen, die Logarithmen negativer Zahlen unmöglich. (32. §.)

40. §.

Der zweyte Beweis, womit Herr d'Alembert seine Meinung zu bestätigen sucht, ist ein merkwürdiges Beyspiel

spiel davon, wie sehr fehlsam algebraische Rechnungen angewandt werden können, wenn man auf die Einschränkungen gewisser sonst richtiger Grundsätze nicht Rücksicht nimmt, welche die Einführung der negativen Zahlen nothwendig gemacht hat. (III. Abhandl. 15. §.) Der Beweis ist dieser. Aus der Gleichung $(-1)^2 = (+1)^2$ folgt $2 \log. -1 = 2 \log. +1$, also auch $\log. -1 = \log. +1 = 0$. Wenn aber $\log. -1 = 0$ ist, so hat man ferner $\log. -a = \log. (+a \times -1) = \log. +a + \log. -1 = \log. +a$. Hr. Bernoulli schließt eben so: weil $(-a)^2 = (+a)^2$ ist, so folgt daraus, es sey $2l -a = 2l +a$, mithin ferner $l -a = l +a$. Herr d'Alembert meinet zwar, daß dieser Beweis unwiderleglich sey: allein seine eigenen Grundsätze widerlegen ihn. Man erinnere sich oben aus den 12. §. der Behauptung, daß die Gleichung $by = (a-x)^2$ eigentlich eine falsche Gleichung sey, wenn $x > a$ ist, und daß die wahre Gleichung diese sey $by = (x-a)^2$: wenn das richtig ist, so muß auch $(-a)^2 = (+a)^2$ eigentlich eine falsche Gleichung, die wahre Gleichung aber diese seyn $(+a)^2 = (+a)^2$, und daraus folgt weiter nichts, als es sey $l +a = l +a$. Diese Bemerkung soll nur darauf aufmerksam machen, wie wenig das System des Herrn d'Alembert mit sich selbst zusammenhängt: sonst ist die Gleichung $(-a)^2 = (+a)^2$ völlig algebraisch richtig, man muß nur die sonst bekannten allgemeinen mathematischen Grundsätze richtig darauf anwenden. Die Regel hat sonst ihre Richtigkeit, wenn zwey Quadratzahlen gleich sind, so sind ihre Wurzeln gleich: in einerley System gehören auch zu gleichen Zahlen gleiche Logarithmen, und die Hälfte des Logarithmen der Quadratzahl ist der Logarithme der Wurzel. Wenn aber diese Regeln in den Anfangsgründen bewiesen werden, so denkt man gar nicht an den Unterschied positiver und negativer Zahlen. Jede arithmetische Quadratzahl hat nur eine Wurzel, und die Regel redet von der Gleichheit der

Qua-

Quadrate und Wurzeln in so fern sie Grössen sind. Dagegen hat jede algebraische Quadratzahl ihrer Natur nach zwey von einander verschiedene algebraisch ungleiche Wurzeln, und wenn man darauf nicht Rücksicht nehmen will, so kann man die widersinnigsten Sätze beweisen. Aus der Gleichung $(-a)^2 = (+a)^2$ kann man vermöge der eben angeführten Regel, wenn man auf den Unterschied algebraischer und arithmetischer Quadratzahlen nicht Rücksicht nehmen will, auch unmittelbar die Folge ziehen,

es sey $-a = +a$: aber ohne Zweifel

ist auch $+a = +a$,

und daraus folgt $0 = 2a$, weil gleiches zu gleichen addirt gleiche Summen giebt: also ist jede Zahl $= 0$, denn man kann anstatt a was man will setzen.

41. §.

Eben darum, weil jede positive algebraische Quadratzahl zwey algebraisch ungleiche Wurzeln hat, kann die Regel: gleiche Quadrate haben gleiche Wurzeln, auf algebraische Quadrate nur angewandt werden, wenn man ihr diesen Sinn beylegt: wenn zwey algebraische Quadratzahlen gleich sind, so ist die positive Wurzel des einen so groß, als die positive Wurzel des andern, und die negative Wurzel des ersten so groß, als die negative Wurzel des andern. Demnach hat $(-a)^2$ so gut die Wurzel $+a$, als die Wurzel $-a$, und $(+a)^2$ so gut die Wurzel $-a$ als die Wurzel $+a$: aus der Gleichung $(-a)^2 = (+a)^2$, die nichts anders ist, als $+a^2 = +a^2$ folgt also $2 \log.(\pm a) = 2 \log (\pm a)$, mithin ferner $\log.(\pm a) = \log.(\pm a)$, und das sind zwey verschiedene Sätze, welche auf keine andre, als auf diese beyden Schlußfolgen leiten können, es sey $1 + a = 1 + a$, und $1 - a = 1 - a$.

Wenn Hr. Euler in der Histoire de l'Academie de Berlin pour l'année 1749. auf der 147 Seite eben diesen Beweis beurtheilet, so zeigt er, daß man auf eben die Art

beweisen könne, es sey $l(a\sqrt{-1}) = la$, wenn man nämlich schliessen wollte $(a\sqrt{-1})^4 = (+a)^4$, also $4l(a\sqrt{-1}) = 4la$, folglich $l(a\sqrt{-1}) = la$. In diesem und allen ähnlichen Beweisen steckt mit dem vorigen einerley Fehler; $(a\sqrt{-1})^4$ hat so gut die Wurzeln $+a$, $-a$, $+a\sqrt{-1}$, $-a\sqrt{-1}$, als sie $(+a)^4$ hat, und es folget also nur dieses, es sey $l\overset{+a}{-a}\sqrt{-1} = l\overset{+a}{-a}\sqrt{-1}$.

42. §.

Eine andre, von den im 39. §. schon bemerkten noch verschiedene, Zweydeutigkeit der Streitfrage über die Logarithmen verneinter Grössen hat man ebenfalls von beyden Seiten nicht genug in Betrachtung gezogen. Die Frage: sind die Logarithmen verneinter Grössen möglich? kann so viel heissen: sind die natürlichen oder die briggischen Logarithmen verneinter Grössen, oder auch noch allgemeiner: sind die Logarithmen verneinter Grössen in einem gegebenen System möglich? Eben diese Frage kann auch so verstanden werden: Läßt sich gar kein Logarithmensystem angegeben, worin die verneinten Zahlen mögliche Logarithmen haben? Die Gründe des Herrn d'Alembert sind zum Theil so beschaffen, daß sie nichts weiter beweisen können, als man müsse überhaupt zugeben, daß sich gar wohl Logarithmensysteme angeben lassen, worin die Logarithmen negativer Zahlen möglich sind. Weil er aber mit dem Hrn. Bernoulli doch darauf dringt, es müsse allemahl $l+a = l-a$ seyn, so sieht man wohl, daß er auch die Frage, in dem ersten Sinn genommen, bejahet habe. Denn bey ihm kann in der Gleichung $l+a = l-a$ das l sowohl einen natürlichen als auch einen Briggischen, ja eines jeden andern Systems Logarithmen bedeuten. Zu den Stellen, die so lauten, daß es scheint, H. d'Alembert behaupte nur im allgemeinen, man könne Logarithmensysteme angeben, worin negative Zahlen mög-

liche Logarithmen haben, gehören unter andern folgende. Les logarithmes des quantités negatives *peuvent être regardés* comme réels (183 Seite) le log. — 1 eſt ou *peut être ſuppoſé* = 0. (185 S.) Wenn wiederum an andern Stellen Gründe angeführt werden, welche die Möglichkeit der Logarithmen negativer Zahlen nur in dem eben bemerkten Sinn beweiſen können; ſo drückt ſich H. d'Alembert doch darüber wieder ganz anders aus. Le logarithme de 2 et le logarithme de — 2 *doivent* être les mêmes, puisque faiſant log. 1 = 0 et log. 4 = p on aura log. 2 et log. — 2 = $\frac{1}{2}$p: (187 S.) eben das wird auf der 198 Seite behauptet. En effet ſoient 1 et a^2 deux nombres poſitifs et réels, qui ayent 0 et p pour logarithmes; il eſt evident, que la moyenne proportionelle entre 1 et a^2 ſera egalement + a et — a, et que le logarithme correſpondant ſera $\frac{1}{2}$p. Donc $\frac{1}{2}$p = l + a et $\frac{1}{2}$p = l — a. Nichts iſt gewiſſer, als daß ſowohl + a als — a zwiſchen + 1 und + a^2 eine algebraiſche mittlere Proportionalgröſſe ſey, und eben davon rührt alle Verwirrung her, die doch ſo leicht gehoben werden kann, wenn man nicht blos rechnen, ſondern beym Rechnen auch denken will. Hätte Herr d'Alembert daraus nichts weiter als dieſes geſchloſſen: wenn l + 1 = 0 und l + a^2 = p ſey, ſo könne überhaupt zu ſagen l + a = $\frac{1}{2}$p, es könne auch l — a = $\frac{1}{2}$p geſetzt werden; ſo müſte man ihm völlig Beyfall geben. Allein weiter folgt auch nichts daraus, und am allerwenigſten dieſes, daß in eben demſelben Syſtem, wo man l + a = $\frac{1}{2}$p geſetzt hat, auch zugleich l — a = $\frac{1}{2}$p geſetzt werden müſſe. Die Vorausſetzung l — a = $\frac{1}{2}$p giebt ein algebraiſches Syſtem, welches von dem ganz verſchieden iſt, wobey die Vorausſetzung l + a = $\frac{1}{2}$p zum Grunde lieget. (28. §.)

43. §.

Die bisher im 38 u. f. §§. von mir beurtheilten Beweiſe nennt H. d'Alembert raiſons purement Métaphyſiques,

ques, und lässet ihnen unter dem Nahmen raison purement Géométriques andre folgen, wovon er zugleich S. 183. äuffert, daß sie ihm demonstrativ zu seyn scheinen. Sonst stimmet die Geometrie bey den interessantesten Untersuchungen mit der algebraischen Analysi so vollkommen überein, daß die allgemeinen Lehren der letztern Wissenschaft, wenn man sie auf die Geometrie anwendet, oft dadurch allererst in ihr völliges Licht gesetzt werden. Es wäre also etwas sehr unerwartetes, wenn bey der Untersuchung über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Logarithmen verneinter Grössen die Folgerungen aus geometrischen Gründen den Folgerungen, worauf eine richtige algebraische Rechnung leitet, widersprechen sollten. Es ist ein bekannter Satz in der Lehre von den Kegelschnitten, daß die zwischen den Aesten der Hyperbel und ihren Asymtoten enthaltenen Trapezien, oder auch die ihnen gleichen Sectoren, sich wie die Logarithmen der ihnen zugehörigen Abscissen verhalten, wenn man diese vom Mittelpunct rechnet. Die Herrn Bernoulli und d'Alembert glauben, daß diese hyperbolischen Flächen möglich bleiben, wenn die dazugehörigen Abscissen negativ werden, und sie machen davon den Schluß auf die Möglichkeit der Logarithmen negativer Grössen. Herr d'Alembert besonders glaubt diesem Beweise erstlich seine rechte Evidenz gegeben zu haben.

44. §.

Es sey OPVGpF die gleichseitige Hyperbel, OG und KZ ihre Asymtoten, ferner AN = y; so ist PN = $\frac{1}{y}$, wenn die Potenz der Hyperbel = 1 ist, und die Ordinaten PN mit der Asymtote OG parallel gezogen werden. Ist nun RS eine andere Ordinate, so ist eigentlich NPSR dem Logarithmen des Verhältnisses $\frac{AR}{AN}$ proportional, und 42. Fig.

in dem Fall, wenn AN = 1 ist, dient es nur zur Verkürzung des Ausdruckes, wenn man sagt, es sey NPSR der Logarithme der Abscisse AR. (16. §.) Man muß eigentlich sagen: jedes Trapezium der Hyperbel, welches zwischen zweyen mit der einen Asymtote parallelen Ordinaten enthalten ist, sey der Logarithme des Verhältnisses der diesen Ordinaten auf der andern Asymtote zugehörigen Abscissen. Das unbestimmte Integral $\int \frac{dy}{y} + C$ kann bekanntermaßen ein Trapezium zwischen jeden zweyen parallelen Ordinaten ausdrücken, und es werden zwey Bestimmungen erfordert, wenn man in jedem besondern Fall wissen will, welches das Trapezium sey, dessen Grösse vermittelst dieses Integrals gefunden wird. Die eine Bestimmung erhält man dadurch, daß man die beständige Grösse C bestimmt, weil hiedurch festgesetzt wird, welches die Ordinate sey, von welcher die quadrirte Fläche ihren Anfang nehmen soll. Die andere Bestimmung kömmt hinzu, wenn man für y einen bestimmten Werth setzet; hiedurch bestimmt man die Ordinate, wo sich die quadrirte Fläche endigen soll. Wenn nun AN = 1 ist, so ist die gewöhnliche Voraussetzung diese, die Fläche soll von PN an gerechnet werden, oder das Integral soll = 0 seyn, wenn y = 1 ist: das giebt $ly + C = 0$, also $C = -l1$,

und dann wird das Integral $= ly - l1 = l\frac{y}{1} = ly$.

Wenn demnach y = AR gesetzt wird; so ist NPSR = $l\frac{AR}{NA} = lAR$, weil AN = 1 seyn soll. Man setze diese Fläche, welche durch Bestimmung der beständigen Grösse in soferne bestimmt ist, daß sie von PN ihren Anfang nehmen soll, überhaupt = S; so ist S = ly. Will man nun aus dieser Gleichung alle die Werthe von S folgern, welche

welche allen möglichen, sowohl positiven, als negativen Werthen von y zugehören; so ist unumgänglich nothwendig, daß man den Ausdruck ly nach seinem ganzen Umfang schon kenne, und wisse, was er bedeutet, man mog statt y setzen, was man wolle: sonst läuft man Gefahr, daß man das schon voraussetze, was erstlich erwiesen werden soll. Demnach ist es gewiß nicht der rechte Weg, wenn man die Sache umkehrt, und zuerst wissen will, ob mit negativen Abscissen der Hyperbel mögliche oder unmögliche Flächen zusammen gehören. Die reine Geometrie weiß nichts von positiven oder negativen, möglichen oder unmöglichen Grössen: das sind algebraische Begriffe, und die hieher gehörigen Fragen müssen aus algebraischen Gründen ihre Erledigung finden.

45. §.

Indessen hat man würklich auf diesem umgekehrten Wege die Untersuchung eingeleitet: man setzte voraus, die Fläche S bleibe möglich für negative y, also müsse auch $1-y$ möglich bleiben, und Herr Bernoulli glaubte, die Sache lasse sich am besten aus der Differentialgleichung beweisen. Es sey nämlich $dS = \frac{dy}{y}$; wenn man nun $-y$ statt y nehme, so erhalte man $dS = \frac{-dy}{-y} = \frac{dy}{y}$, und daraus folge $S = l-y = l+y$: folglich gehöre gleichen und entgegen gesetzten y eine gleiche Fläche S zu. Bey diesem vermeinten Beweise wird vorausgesetzt, daß man richtig schliessen könne: wenn zwey Differentiale gleich sind, so sind auch ihre Integrale gleich groß: denn der ganze Beweis ist kurz dieser, es sey $d.l-y = d.l+y$, folglich auch $l-y = l+y$. In andern Fällen

aber würde Herr Bernoulli selbst gewiß diese Art zu schliessen als unrichtig verworfen haben. Differentiale propositum infinita habet integralia, das lehrt H. Bernoulli selbst in seiner Integralrechnung. (Lect. VII. Oper. Ioh. Bernoullii Tom. III. pag. 412.) Es ist aber $-y = +y \times -1$, also $l-y = l+y+l-1$. Weil nun $l-1$ eine Constans ist, welche beym Differentiiren wegfällt, so erhält man allerdings $d.l-y = d.l+y$, und aus demselben Grunde ist auch allemahl $d.l.ny = d.ly$: allein umgekehrt folgt so wenig aus der ersten Gleichung, daß $l-y = l+y$ sey, als man aus der zweyten Gleichung folgern kann, es sey $lny = ly$. Aus der Gleichung $dS = \frac{dy}{y}$ folgt vermittelst der Integration $S = ly + C$, und wenn $S = o$ seyn soll, wenn $y = n$ ist, so hat man $C = -ln$, mithin $S = ly - ln = l\frac{y}{n}$. Es sey $n = -1$ $= -An$, so ist $S = ly - l - 1 = l\frac{y}{-1}$, und es ist np die erste Ordinate, wo die quadrirte Fläche anfangen soll. Nimmt man ferner $y = -Ar$, so hat man $S = l\frac{-Ar}{-An}$, und das ist nun die Fläche npsr: sie wird $= o$, wenn $Ar = An$ ist. Setzt man $-Al$ anstatt y, so ist $S = l\frac{-Al}{-An}$, und das ist nun die Fläche npml. Für y oder $Al = o$ wird daraus nAGp, für positive y aber giebt es keine Fläche weiter, die bey np anfinge, und durch das Integral $S = l\frac{+AL}{-An}$ ausgedrückt werden könnte. Mit der Fläche $NPSR = l\frac{+AR}{+AN}$ (44. §.) hat es eine ähnli-

che

che Bewandniß: sie verschwindet, wenn man AR = AN nimmt. Setzt man + AL anstatt y, so ist die Fläche $NPML = l\frac{+AL}{+AN}$, und für AL = o, wird daraus ALMO. Für negative y aber, wie Al, giebt es weiter keine Fläche, die bey NP anfinge, und durch das Integral $S = l\frac{-Al}{+AN}$ ausgedrückt werden könnte.

46. §.

Herr d' Alembert hält den eben beurtheilten Beweis des Herrn Bernoulli zwar an sich für richtig, glaubt aber, er könne noch verbessert werden, so daß die Sache dadurch auffer allem Zweifel gesetzt werde; er trägt ihn auf der 188 S. der Opuscules, in einer allgemeinern Form vor, so wie ich denselben mit des Herrn Verfassers eigenen Worten ganz hieher setze.

Supposons en géneral $dx = \frac{a^n dy}{y^n}$, n êtant un nombre entier positif impair, il est certain qu'on pourra construire la courbe à laquelle cette équation appartient. Il faut d'abort tracer les hyperboles OPV, GpF, dans les quelles l'abscisse $AN = y$, et l'ordonnée $PN = \frac{a^n}{y^n}$; il faut ensuite chercher l'aire $\int \frac{a^n dy}{y^n}$ repondante à une abscisse quelconque AR, en supposant, que cette aire soit = o, lorsque y = AN; la courbe, dont les ordonnées seront proportionelles à ces aires sera la courbe cherchée. Or l'on trouvera facilement, qu'à une abscisse quelconque y, positive ou negative, il repond la meme valeur de l'aire. Car soit An = AN et Ar = AR; l'aire repondante à l'abscisse Ar sera NPOA + AnpG + npsr.

Or les aires AnpG, npsr ẽtant negatives par rapport à l'aire NPOA, qui eſt negative elle meme par rapport à l'aire NPSR; il s'enſuit que l'aire repondante à l'abſciſſe negative Ar, c'eſt a dire, l'ordonnée x repondante à cette abſciſſe, équivaut à la quantité ſuivante — NPOA + NPOA + NPSR = NPSR; d'ou il s'enſuit, qu'a deux valeurs de y égales et de differens ſignes, il répond une même valeur de x. Donc toute courbe, dans laquelle $dx = \frac{a^n dy}{y^n}$, n etant un nombre impair quelconque, a deux branches égales, ſemblables et ſemblablement ſituées de part et d'autre de la ligne de x. Il eſt vrai, que dans le cas de $n = 1$ l'integration n'a pas lieu. Mais la methode, que nous venons de donner pour conſtruire la courbe $dx = \frac{a^n dy}{y^n}$, par la quadrature d'une hyperbole, dont les ordonnées ſoient $= \frac{a^n}{y^n}$, léve toute difficulté. Car l'hyperbole ordinaire, dont les ordonnées ſont $\frac{a}{y}$, eſt préciſément dans le même cas, que les autres; et il eſt impoſſible de rien établir ſur les aires repondantes aux abſciſſes de celles ci, qui ne convienne également a l'hyperbole ordinaire.

47. §.

Herr d'Alembert nimmt hier, wie es ſcheinet, ganz richtig an, daß vermöge der Vorausſetzung, nach welcher bey der Integration die beſtändige Gröſſe iſt beſtimmt worden, die der Abſciſſe $y = Ar$ zugehörige Fläche ſich von der Ordinate PN bis zur Ordinate rs erſtrecken müſte: er ſagt nämlich dieſe Fläche müſſe = NPOA + AnpG + npsr ſeyn. „Ferner heißt es, die Flächen AnpG,

AnpG, npsr, sind negativ gegen NPOA; also muß man entweder — AnpG — nprs anstatt + AnpG + nprs schreiben, wofern NPOA das Zeichen + behalten kann, oder es müssen wenigstens die Zeichen jener beyden Theile dem Zeichen, welches NPOA erhält, entgegen gesetzt seyn. Aber NPOA ist selbst negativ gegen NPSR, also muß NPOA das Zeichen (—) und eben darum müssen die beyden andern Theile das entgegen gesetzte Zeichen + haben: mithin ist $\int \frac{a^n dy}{y^n} = -NPOA + AnpG + npsr = npsr = NPSR.$ „

Wenn der letzte Schlußsatz den Sinn haben soll: der algebraische Werth des Integrals $\int \frac{a^n dy}{y^n}$ werde = npsr, wenn $y = Ar = -AR$ gesetzt wird; so hat es mit dem Satze selbst seine Richtigkeit, aber keinesweges mit dem Beweise, welchen H. d'Alembert vorträgt. Es ist falsch, daß die Fläche NPOA der Fläche AnpG, oder auch der Fläche ArsG = AnpG + nrsp entgegen gesetzt sey; die richtige algebraische Rechnung setzt diese Sache in ein ganz andres Licht. Ich habe die Gründe, worauf hier alles ankommt, im 48. u. f. §§. der III. Abhandlung vorgetragen: also ist es leicht, auf den hier vorkommenden Fall die Anwendung zu machen.

48. §.

Weil in der Gleichung $PN = \frac{a^n}{y^n}$ die Zahl n eine ungrade Zahl seyn soll, so will ich 2n + 1 anstatt n, und jede Ordinate PN = z setzen, die mit der Abscisse AN = y zusammen gehört: alsdenn ist $z = \frac{a^{n+1}}{y^{n+1}}$ die Glei-

chung für die Hyperbel OPVGpF, die zur Ordnung $n+2$ gehört, und die Integration giebt $\int z dy = \int \frac{a^{n+1}}{y^{n+1}} dy =$ $C - \frac{a^{2n+1}}{2ny^{2n}}$. Weil dieses Integral $= o$ seyn soll, wenn $y = AN$ ist; so sey $AN = b$, und man erhält $\int z dy = \frac{a^{2n+1}}{2n}\left(\frac{1}{b^{2n}} - \frac{1}{y^{2n}}\right)$. Wegen der Natur der Integralformul, worin der Exponent von y eine grade Zahl ist, kann die Voraussetzung, daß $\int z dy = o$ seyn soll, wenn $y = +AN$ ist, nicht ausschliessungsweise bestehen: eben dieses Integral wird zum zweytenmahl $= o$, wenn $y = An = -AN$ ist, und man kann das Gesetz leicht übersehen, nach welchem sich $\int z dy$ ändern muß, wenn die positiven y nach und nach abnehmen, zuletzt aber in den entgegen gesetzten Zustand übergehen. Weil der veränderliche Theil dieses Integrals abnimmt, wenn y wächst, so wächst das Integral selbst mit y, so lange $y > b$ bleibt; unter dieser Bedingung ist also $\int z dy =$ der Fläche NPSR . Für $y = b$ wird das Integral $= o$, wie es vorausgesetzt ward; aber für $y < b$ wird es negativ, und wächst so lange wieder, bis es für $y = o$ unendlich groß wird. Zwischen den Gränzen $y = +b$ und $y = o$ drückt es also für $y = +AL$ die Fläche NPML aus. Wird y negativ, so bleibt dieses Integral Anfangs noch negativ, so lange nämlich $-y < -b$ bleibt, aber es nimmt ab, wenn $-y$ wächst, und wird von neuen $= o$, wenn $y = An = -AN$ wird, wie es den in der III. Abhandlung im 46. u. f. §. vorgetragenen Gründen gemäß ist. Nimmt man demnach $y = -Al$, und den Punct l zwischen A und n, so daß lm die der Abscisse $-Al$ zugehörige Ordinate ist; so liegt die Fläche, welche nun das Integral ausdrückt, zwischen np und lm, und das ist keine andere als npml,

weil

weil für $y = An = -b$ das Integral abermal $= o$ wird. Wächst endlich $-y$ über $-b$ hinaus, so wird das Integral wieder positiv, und wächst mit $-y$, da es dann die Fläche nprs ausdrückt. Vermöge dieser Rechnung muß man allerdings zugeben, daß in allen Hyperbeln, welche die Gleichung $z = \frac{a^{n+1}}{y^{n+1}}$ ausdrückt, den negativen Abscissen mögliche und eben so grosse Flächen, als den ihnen gleichen und entgegen gesetzten positiven Abscissen zugehören: allein das ist nicht alles, was aus der Rechnung folgt. H. d'Alembert bemerkt den Hauptumstand nicht, worauf hier alles ankommt, den Umstand nemlich, daß die mit den negativen Abscissen zusammen gehörigen Flächen nicht bey eben der Ordinate als ihrer ersten Gränze anfangen, wo die mit den positiven Abscissen zusammen gehörigen Flächen ihren Anfang nehmen. Ich werde mich darüber bald näher erklären, zuvor aber muß ich dem H. d'Alembert in seinen Schlüssen noch weiter folgen.

49. §.

Unter der allgemeinen Gleichung $z = \frac{a^{2n+1}}{y^{2n+1}}$ ist auch die apollonianische Hyperbel enthalten, wenn man hier $n = o$ (beym H. d'Alembert $n = 1$) setzt: alsdenn findet man $\int z dy = \frac{a}{o}\left(\frac{1}{b^o} - \frac{1}{y^o}\right)$, und weil diese Formul ganz unbestimmt ist, so scheint es selbst nach H. d'Alemberts Aeusserung zweifelhaft, ob die im 48. §. aus der allgemeinen Gleichung gefolgerten Sätze in diesem besondern Fall schlechthin ihre Anwendung finden. „Il est vrai (m. s. oben den 46. §.) que dans le cas de $n = 1$ l'integration n'a pas lieu.„ Was weiter folgt, das möchte wohl diesem Zweifel nicht so vollkommen abhelfen, als H. d'Alembert glaubt. „L'hyperbole ordinaire est preci-

sément

sément dans le même cas, que les autres, et il est impossible de rien établir sur les aires repondantes aux abscisses de celles ci, qui ne convienne également a l'hyperbole ordinaire.„ Die nachstehenden Schlüsse mögten wohl mehr Ueberzeugung bewirken. Der Grund, warum die mit den Abscissen AL zusammengehörige Fläche NPML algebraisch negativ wird, ist dieser, weil AL als abnehmend betrachtet wird, also dy negativ, mithin auch das Rechteck zdy negativ ist: dieserwegen ist NPML die Gränze der Summe aller negativen Rechtecke zdy, und das geht so fort, bis AL = o wird. Für negative $y = Al = -AL$ ist auch dy negativ, und zugleich wird $z = \frac{a^{2n+1}}{y^{2n+1}}$ negativ; ja eben das ist auch der Fall für die apollonianische Hyperbel, wenn $z = \frac{a}{y}$ genommen werden muß. Dieserwegen werden nun die Rechtecke zdy positiv, die Gränze der Summe dieser positiven Rechtecke vermindert die bis auf AL = o gefundene Gränze der Summe aller negativen Rechtecke zwischen PN und AO: also muß fzdy als die algebraische Summe aller Rechtecke von NP bis Im wieder abnehmen, und für den Fall $y = An = -AN = o$ werden, weil nun der vorige negative Werth durch die hinzugekommene positive Summe ganz aufgehoben wird. Für solche negative y, die noch grösser als An sind, vermehrt sich die Summe der positiven Rechtecke noch weiter fort: also muß nun der positive Theil des Integrals fzdy den negativen Theil desselben zu übertreffen anfangen, also das Integral selbst, welches nun die Fläche npsr giebt, wieder algebraisch positiv werden. Alle diese Schlüsse kann man völlig eben so auf die apollonianische Hyperbel anwenden, mithin ist die Behauptung des H. d'Alembert, „l'hyperbole ordinaire est precisément dans même cas, que les autres„ wenn sie den eben vorge-

tra-

tragenen Schlüssen gemäß verstanden wird, vollkommen richtig.

50. §.

Diesemnach ist es vollkommen richtig, daß auch mit gleichen und entgegen gesetzten Abscissen auf einer Asymtote der apollonianischen Hyperbel gleiche hyperbolische Trapezien zusammen gehören; der zweyte im 48 §. schon bemerkte Hauptumstand aber muß nicht vergessen werden: die mit den gleichen und entgegen gesetzten Abscissen zusammengehörigen gleich grossen Trapezien haben nicht einerley Ordinate zur Anfangsgränze; mit der einen NPSR gehört die Anfangsgränze NP, mit der andern aber np als Anfangsgränze zusammen. Wenn man sich nun erlaubt weiter zu schliessen, es sey nrsp $=$ l — Ar, und NRSP $=$ l + AR; so ist der Beweis fertig, daß l — Ar $=$ l + AR sey, und noch dazu, wie H. d'Alembert selbst (a. a. O. 191. S.) hinzusetzt, der Beweis davon, daß diese Logarithmen zu einem und eben demselben System gehören, welches die hyperbolischen Trapezien mit den dazu gehörigen Abscissen vorstellen. Wer sich aber nicht erlaubt, mit algebraischen Formuln ganz willkührlich umzugehen, der muß die algebraisch geometrischen Lehrsätze in keinem andern Sinne als in demjenigen anwenden, in welchem theils die Erfinder selbst, theils andre geometrische Schriftsteller sie bewiesen haben. Jedes hyperbolische Trapezium wie NPSR gehört zu zweyen Abscissen, wovon die eine AN eine Constans, die andre AR aber veränderlich ist, und das Trapezium NPSR ist der Logarithme des Verhältnisses der veränderlichen Abscisse AR zur beständigen Abscisse AN. Man muß also jene Art zu schliessen so verbessern: es ist $nrsp = l\frac{Ar}{An} = l\frac{-AR}{-AN}$,

und $NRSP = l\frac{+AR}{+AN}$, so erhält man $l\frac{-AR}{-AN} =$

$l+$

$1\frac{+AR}{+AN}$, und das ist ganz was anders, als was H. d'Alembert beweisen wollte. (39. §.) Schreibt man NRSP $=1+AR$, nrsp $=1-Ar$; so haben diese Sätze entweder gar keinen algebraischen Sinn, oder man muß sie als Abkürzungen für den besondern Fall ansehen, wenn in den Formuln $NRSP=1\frac{+AR}{+AN}$, $nrsp=1\frac{-Ar}{+AN}$, die Ordinate $AN=1$ gesetzt ist: Alsdenn bleibt zwar richtig $NRSP=1+AR$, weil nun AR eine positive Zahl vorstellet, aber die andre Gleichung, weil nun $-Ar$ eine negative Zahl vorstellen soll, ist demonstratisch falsch, und folgt schlechterdings nicht aus dem nun umständlich beurtheilten verneinten Beweise.

51. §.

Die Gleichung $\int zdy = \frac{a^{2n+1}}{2n}\left(\frac{1}{b^{2n}} - \frac{1}{y^{2n}}\right)$ (48. §.) läßt sich auch so ausdrücken $\int zdy = \frac{a^{2n+1}}{2ny^{2n}}\left(\frac{y^{2n}}{b^{2n}} - 1\right)$, oder $\int zdy = \frac{1}{2}a.\frac{(a^2)^n}{n(y^2)^n}\left(\left(\frac{yy}{bb}\right)^n - 1\right)$.

Man setze $n=\frac{1}{m}$, so hat man $\int zdy = \frac{1}{2}a.m.\left(\frac{aa}{yy}\right)^{\frac{1}{m}}\left(\left(\frac{yy}{bb}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right)$: alsdenn ist für die Apollonianische Hyperbel $n=0$, und man muß für m die Gränze ∞ setzen. Setzt man $\left(\frac{aa}{yy}\right)^{\frac{1}{m}} = 1+w$, und $\frac{1}{2}am\left(\left(\frac{yy}{bb}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right) = Y$, so wird $\int zdy = Y + w.Y$, und die Gränze dieses Wer-

Werthes ist $=Y$, weil w verschwindet, wenn $\frac{1}{m}=0$ gesetzt wird. Zugleich wird aus Y die Gränze des Werthes $\frac{1}{2}am((\frac{yy}{bb})^{\frac{1}{m}}-1)$, diese ist $=\frac{1}{2}al\frac{yy}{bb}$ (31. §.), und hiedurch wird das alles vollkommen bestättiget, was im 49. §. schon aus andern Gründen von den Trapezien der Apollonianischen Hyperbel ist bewiesen worden. Die Formul $\int zdy=\frac{1}{2}a.l\frac{yy}{bb}$ ist positiv für positive y, so lange $y>b$ bleibt, und sie wird negativ für $y<b$, sie wird $-\infty$, wenn $y=0$ wird, bleibt auch noch negativ für negative y, die kleiner sind als b, nimmt aber ab, wenn $-y$ wächst, und verschwindet, für $y=-b$, da dann eben diese Formul für noch grössere negative y wieder positiv wird, und mit ihnen wächst.

52. §.

Es sey $f>b$, also $\frac{f}{b}$, und eben darum auch $\frac{ff}{bb}$ ein unächter Bruch, den man $=1+\beta$ setzen kann; so hat man $(\frac{ff}{bb})^{\frac{1}{m}}=(1+\beta)^{\frac{1}{m}}=1+\frac{1}{m}(\beta+\frac{1}{2}(\frac{1}{m}-1)\beta^2+\frac{1}{6}(\frac{1}{m}-1)(\frac{1}{m}-2)\beta^3+\ldots\ldots)$. Die eingeschlossene mit $\frac{1}{m}$ multiplicirte Reihe setze man $=\gamma$, so ist $(\frac{ff}{bb})^{\frac{1}{m}}=1+\frac{1}{m}\gamma$. Ferner sey $\frac{yy}{bb}=(\frac{ff}{bb})^r$, so hat man $(\frac{yy}{bb})^{\frac{1}{m}}=(\frac{ff}{bb})^{\frac{r}{m}}=(1+\frac{1}{m}\gamma)^r=1+$

$$r.\frac{1}{m}\gamma + \frac{r.r-1}{1.2}.\frac{1}{m^2}\gamma^2 + \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3}.\frac{1}{m^3}\gamma^3 + \ldots$$

und das giebt $m\left(\left(\frac{yy}{bb}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right) = r\gamma + \frac{r.r-1}{1.2}.\frac{1}{m}\gamma^2$

$$+ \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3}.\frac{1}{m^2}\gamma^3 + \ldots.$$ Setzt man ferner anstatt m die Gränze ∞, so wird $\gamma = \beta - \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{1}{3}\beta^3 - \frac{1}{4}\beta^4 + \ldots..$ und $m\left(\left(\frac{yy}{bb}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right) = r\gamma$. Man kann $f < b\sqrt{2}$ nehmen, so wird die für y gefundene Reihe convergirend seyn. So lange nun $y > b$ ist, muß r positiv seyn, und mit y wachsen, für $y = b$ aber verschwinden. Wenn $y < b$ wird, so muß r negativ seyn, und für $y = 0$, muß r negativ unendlich werden. Für negative y bleibt Anfangs r negativ, so lange $y < b$ ist, nimmt aber ab, wenn y wächst, bis für $y = -b$, wiederum $r = 0$ wird: für grössere negative y wächst r wieder positiv. Das alles stimmt mit dem 49. und 51. §. völlig überein, und diese Rechnung ist eine neue Bestätigung dessen, daß die Werthe für $n = 0$ in dem Integral $\frac{a^{2n+1}}{2n}\left(\frac{1}{b^{2n}} - \frac{1}{y^{2n}}\right)$ (48. §.) noch eben so abwechseln, wie in den Fällen, da n nicht $= 0$, sondern einer bestimmten ganzen Zahl gleich ist.

53. §.

Setzt man im 48. §. $\int z dy = x$, so gehört die Gleichung $x = \frac{a^{2n+1}}{2nb^{2n}} - \frac{a^{2n+1}}{2ny^{2n}}$ für die quadrirende Linie der Hyperbel der Ordnung $n+2$, deren Natur die Gleichung $z = \frac{a^{n+1}}{y^{n+1}}$ ausdrückt, und die quadrirende linke

ist

ist selbst eine Hyperbel der Ordnung $2n+1$. Es sey AB die Abscissenlinie, AR $=y$, RM $=x$; so findet man RM $=\frac{a^{2n+1}}{2nb^{2n}}$, wenn man $y=\pm\infty$ setzt. Auf der Axe der Applicaten CD nehme man AC $=\frac{a^{2n+1}}{2nb^{2n}}$, und setze EF durch C auf DC senkrecht, so ist EF eine Asymtote dieser Hyperbel. In den Fällen $y=AN=+b$, und $y=An=-b$, hat man $x=0$, also wird die Hyperbel in N und n von der Abscissenlinie geschnitten. Für kleinere positive oder negative y wird x negativ, und wächst sehr schnell, wenn y weiter abnimmt, bis für $y=0$, $x=\infty$ wird: also ist auch CD eine Asymtote der Hyperbel. Für $n=0$, wenn $z=\frac{a}{y}$ ist, verwandelt sich die quadrirende Linie in die logarithmische Linie, die man also als eine Hyperbel der ersten Ordnung ansehen kann. Weil nun alle Hyperbeln ungrader Ordnungen aus zweyen gleichen, ähnlichen, und gegen die mit den Ordinaten parallele Asymtote ähnlich liegenden Stücken bestehen; so leitet das auf die Vermuthung, es müsse eben dasselbe auch von der Hyperbel der ersten Ordnung, oder der logarithmischen Linie gelten. Ob aber diese Vermuthung gegründet sey, das kann nur in sein völliges Licht gesetzt werden, wenn man den besondern Fall, wenn $n=0$ ist, gehörig entwickelt.

43. Fig.

54. §.

Man setze demnach $n=0$, so wird die beständige Grösse $\frac{a^{2n+1}}{2nb^{2n}}=AC=PR$ unendlich groß: also behält die logarithmische Linie nur die eine Asymtote CD. Fer-

ner drückt in der allgemeinen Gleichung $x = \frac{a^{2n+z}}{2ub^{2n}} - \frac{a^{2n+z}}{2ny^{2n}}$ der veränderliche Theil das Stück PM der Entfernung PR aus, welches gleichfalls unendlich groß wird, so daß nunmehro die Ordinate RM die Differenz zweyer unendlichen Grössen RP und PM wird, wie die Gleichung richtig angiebt. Uebrigens verwandelt sich die allgemeine Gleichung in folgende $y = \frac{1}{2}al\frac{yy}{bb}$, (51. §.) und diese leitet noch auf die nachstehenden Folgen: 1) daß x zweymal $= o$ werde, nämlich für $y = +b = +AN$, und für $y = -b = -An$; 2) daß x einmal negativ unendlich werde, für $y = o$, und 3) daß x zweymal positiv unendlich werde, für $y = +\infty$, und $y = -\infty$. Zwischen den Gränzen $y = +b$, und $y = +\infty$ wächst x von o bis ∞, zwischen den Gränzen $y = +b$ und $y = o$ ist x negativ und wächst bis zu $-\infty$; zwischen den Gränzen $y = o$, und $y = -b$ bleibt x negativ, und nimmt ab bis zur o; endlich zwischen den Gränzen $y = -b$, und $y = -\infty$ wird x wieder positiv und wächst bis $+\infty$. Vermöge dieser Verzeichnung ergeben sich nun ohne Zweifel zwey gleiche und ähnliche Stücke der logarithmischen Linie, nämlich VNm und vnm. Jede positive Abscisse AR hat mit der ihr gleichen und entgegen gesetzten negativen Ar eine gleiche Ordinate $RM = rm$. So weit ist an allen diesen Schlüssen nichts auszusetzen, und man kann ohne Bedenken zugeben, daß die logarithmische Linie, wenn sie als die Quadratix der Hyperbel angesehen wird, und ihre Ordinaten den möglichen Flächen der Hyperbel auf beyden Seiten proportional seyn sollen, einen Durchmesser habe, oder aus zweyen gleichen und ähnlichen Stücken bestehe.

55. §.

55. §.

In der Gleichung $x = \frac{1}{2}al\frac{yy}{bb}$ hat bisher x die Ordinate und y die Abscisse vorgestellet: wenn man aber MQ mit AR parallel ziehet, so wird $x = RM = AQ$ und $y = AR = QM$. Nimmt man also die Abscissen AQ, auf der Asymtote, und die Ordinaten MQ auf ihr senkrecht, so dienet eben die Gleichung, nur mit dem Unterscheid, daß die Bedeutung der Buchstaben x und y sich verwechselt, und x die Abscisse, y aber die Ordinate anzeigt. Wenn nun e die Basis der natürlichen Logarithmen ist, so giebt die Gleichung $x = \frac{1}{2}al\frac{yy}{bb}$ auch diese $e^{2x:a} = \frac{yy}{bb}$, also wird $y = \pm be^{x:a}$, so daß jeder Abscisse x zwey gleiche und entgegen gesetzte y zugehören. Man kann demnach der logarithmischen Linie zwey Aeste lassen, man kann zugeben, daß sie einen Durchmesser habe: inzwischen behalten die Hrn. von Leibnitz und Euler noch immer recht, wann sie es läugnen, daß diese Linie einen Durchmesser habe; denn sie haben es in einem andern Verstande geläugnet, als es hier erwiesen ist. Gemeiniglich wird die Gleichung für die logarithmische Linie so ausgedrückt $x = al\frac{y}{b}$, oder $e^{x:a} = \frac{y}{b}$, und es ist offenbar, daß diese Gleichung nur einen Ast allein ausdrücken könne; deswegen würde die Frage seyn, welche Gleichung man nehmen müsse? Es ist nun nicht schwer, hierauf zu antworten, und es in sein völliges Licht zu setzen, worauf die ganze Streitigkeit von der Gestalt der logarithmischen Linie ankomme.

56. §.

Herr Euler hatte in den Memoires de Berlin erinnert, daß man nicht sicher schliessen könne: wenn alle die

linien, welche die Gleichung $dx = \frac{dy}{y^{2n+1}}$ ausdrückt, einen Durchmesser haben, so muß dieser Durchmesser noch bleiben, wenn $n = 0$ ist, weil in diesem Fall das Integral nicht algebraisch bleibt. Um desto überzeugender darzuthun, daß dergleichen Sätze, so allgemein sie scheinen möchten, dennoch in speciellen Fällen zuweilen Ausnahmen leiden, führt er die Gleichung $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3(b+x)}$ als ein Exempel an. Alle Linien, welche diese Gleichung ausdrückt, sind algebraisch und haben einen Durchmesser; dennoch aber behält die Linie keinen Durchmesser mehr, wenn $b = 0$ ist. Hierauf antwortet H. d'Alembert, das habe zwar seine Richtigkeit, aber es rühre eigentlich daher, weil in dem Fall $b = 0$ die Gleichung des achten Grades, welche $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3(b+x)}$ giebt, sich in zwey rationale Gleichungen der vierten Ordnung theile, also in der That zwey unterschiedene Linien ausdrücke, die für einerley Axe und Anfangspunct der Abscissen beschrieben worden. Hierauf kann man erwiedern, daß grade derselbe Fall eintrete, wenn von der Gleichung $x = \frac{a^{2n+1}}{2n}\left(\frac{1}{b^{2n}} - \frac{1}{y^{2n}}\right)$ die Rede ist. Setzt man $n = 0$, so wird daraus $\frac{2x}{a} = 1\frac{yy}{bb}$, oder $e^{2x:a} = \frac{yy}{bb}$.

Jene Gleichung theilt sich in die beyden Gleichungen $\frac{x}{a} = 1\frac{y}{b}$ und $\frac{x}{a} = 1\frac{-y}{-b}$, und diese in die beyden Gleichungen $e^{x:a} = \frac{y}{b}$ und $e^{x:a} = \frac{-y}{-b}$; also gehören die beyden Aeste der logarithmischen Linie, welche die allge-

allgemeine Gleichung giebt, eigentlich nicht weiter zusammen, als ein Paar Linien, die für einerley Axe und Anfangspunct der Abscissen beschrieben sind. Beyde Aeste drücken auch keine verschiedene Logarithmensysteme aus, sondern der eine Ast drückt gerade dasselbe System aus, was der andere ausdrückt. In der That hat es also damit eben die Bewandniß, wie mit der Gleichung $yy = nnxx$, welche ein System zweyer gegen die gemeinschaftliche Axe auf beyden Seiten ähnlich liegender geraden Linien giebt: wer wollte aber hieraus die Folge ziehen, daß zu einer jeden geraden Linie eine andere gehöre, die auf der andern Seite gegen die Axe eine ähnliche Lage hat. Inzwischen kömmt man doch oft bey Auflösung einer Aufgabe auf diese Gleichung, da es denn ein Beweis ist, daß zur vollständigen Verzeichnung zwey grade Linien erfordert werden, wie wenn man die Gleichung für den Schnitt eines senkrechten Kegels sucht, der durch die Axe gehet. Ein und eben derselbe Logarithme gehöret nicht nur dem Verhältnisse $\frac{y}{b}$, sondern auch dem Verhältnisse $\frac{-y}{-b}$ zu.

Weder die Gleichung $x = l\frac{y}{b}$, noch die Gleichung $x = l\frac{-y}{-b}$ kann beydes zugleich ausdrücken; will man eine Gleichung haben, die beydes zugleich ausdrückt, so muß man beyde zusammen addiren, oder welches einerley ist die Gleichungen $e^{x:a} = \frac{y}{b}$ und $e^{x:a} = \frac{-y}{-b}$ in einander multipliciren. Bey obiger Art, die Hyperbel zu quadriren, enthielte das Integral die Logarithmen der Verhältnisse der positiven Abscissen zur positiven Einheit sowohl als auch der negativen Abscissen zur negativen Einheit: also mußte eine Gleichung heraus kommen, die beydes aus-

ausdrückte, und die Quadratix mußte aus zweyen Stücken bestehen, so wie der Kegelschnitt durch die Axe des Kegels aus zweyen graden Linien.

57. §.

H. d'Alembert braucht noch verschiedene andere Gründe zu beweisen, daß die logarithmische Linie einen Durchmesser haben müsse; auf der 191 und 192 Seite der Opuscules finde ich folgende Schlüsse. Die Gleichung $y = c^x$ giebt für unzählige Werthe von x einen doppelten Werth von y, allemahl nämlich, wenn $x = \frac{n}{2^m}$ ist; also hat die logarithmische Linie auf der andern Seite der Axe wenigstens unzählige puncta discreta. Dieses geben auch wohl andere Geometer zu, die sonst auf des Herrn von Leibnitz Seite sind: allein man kann diese Behauptung ohne Bedenken für falsch erklären, weil c^x keine andere, als positive Werthe haben kann, was auch x bedeutet, (32. §.) wenn es nur eine mögliche Grösse ist, wie an dem angeführten Ort vorausgesetzt wird. H. d'Alembert gehet noch weiter und behauptet, daß diese puncta discreta eine stetige Linie ausmachen: denn sagt er, man muß voraussetzen, daß c einen doppelten Werth habe, einen positiven und einen negativen, und dieses deßwegen, weil c die Zahl ist, deren Logarithme = 1 ist, und weil nach seinem System jedem Logarithmen zwey gleiche und entgegen gesetzte Zahlen zugehören. Dieser letzte Satz ist, wie ich glaube, hinlänglich widerlegt, also fällt der ganze Beweis für den doppelten Werth von c weg. Ueberdem ist die Voraussetzung dieses doppelten Werths von c deswegen unrichtig, weil ein Logarithmensystem, dessen Basis $= -c$ seyn soll, von demjenigen dessen Basis $= +c$ ist, so gewiß unterschieden ist, als ein System, dessen Basis $= 10$ ist, von demjenigen unterschieden ist, dessen Basis $= 8$,

$= 8$, oder sonst eine andre von 10 unterschiedene Zahl seyn soll. Ferner ist diese Voraussetzung wider alle Begriffe von den in analytischen Gleichungen vorkommenden beständigen Grössen: diese müssen ganz bestimmt seyn, sowohl in Ansehung der Grösse, als auch in Ansehung der Lage, ehe und bevor man die Linie, welche die Gleichung ausdrückt, verzeichnen kann. Wenn Hr. d'Alembert ferner behauptet, es habe mit der Gleichung $y = c^x$ eben die Bewandniß, wie mit der Gleichung $y = \sqrt{x}$ für die Parabel, so ist es schwer einzusehen, wie das eigentlich gemeinet sey. Die Gleichung $y = \sqrt{x}$ muß deßwegen quadrirt werden, weil sie irrational ist; das ist die Ursache, warum weder $y = +\sqrt{x}$, noch $y = -\sqrt{x}$ die Parabel ganz ausdrückt, sondern vielmehr die Gleichung $yy = x$: hier muß also die auf die Potenz $\frac{1}{2}$ schon erhöhete Grösse nämlich $x^{1:2}$ beyde Zeichen haben. Aber Hr. d'Alembert wollte beweisen, daß c, die Grösse unter dem Exponenten beyde Zeichen haben müsse: wie das nun aus dem angebrachten Exempel der Parabel folge, weis ich nicht.

58. §.

Mit dem vorigen Beweise verbindet Hr. d'Alembert an eben der Stelle noch einen andern. Er sagt so: man nehme auf der Axe der logarithmischen Linie einen Punct Q nach Belieben, schneide auf der Axe zwey gleiche Stücke AQ, QP ab, und ziehe die Ordinate AB, PM; so ist die Ordinate in Q zwischen AB und PM die mittlere geometrische Proportionallinie, welche allemahl einen doppelten Werth hat, QS und $QR = -QS$, u. s. f. Das ist im Grunde eben soviel als wenn H. d'Alembert die Gleichung $e^{x:a} = \frac{y}{b}$ quadrirt, und $e^{2x:a} = \frac{yy}{bb}$ für die Gleichung der logarithmischen Linie angenommen hätte. Wenn die oben von mir vorgetragene richtige algebraische Rech- 44. Fig.

nung, welche auf diese Gleichung als eine solche leitete, die mit der Quadratice der Hyperbel zusammen gehört; diese Form der Gleichung nicht rechtfertigte, so würde hiemit doch nichts bewiesen seyn. Die Linie BMN mag seyn welche sie wolle, so kann man an beyden Seiten einer Ordinate QS ein Paar andre AB, PM, angeben, zwischen welchen QS eine mittlere geometrische Proportionallinie ist. Von der Parabel MAN, wozu die Gleichung $y = nxx$ gehört, kann man eben so beweisen, daß jeder Abscisse AQ zwey gleiche entgegen gesetzte Ordinaten QS und QR zugehören. Man nehme nämlich einen Punct D nach Gefallen zwischen A und Q, den Punct P aber so, daß $AD^2 : AQ^2 = AQ^2 : AP^2$ wird, und ziehe die Ordinaten DE und PM; so ist nun die Ordinate in Q zwischen DE und PM die mittlere geometrische Proportionallinie, welche einen doppelten Werth haben muß, QS und QR $= -QS$. Wenn man die Gleichung quadrirt, so folgt aus $yy = nnx^4$ eben dasselbe. So wenig aber diese Schlüsse beweisen können, daß die Parabel auf beyden Seiten der Abscissenlinie AP gleiche und ähnliche Stücke habe; eben so wenig können es jene Schlüsse des Hrn. d'Alembert von der logarithmischen Linie darthun. Würde man inzwischen bey Auflösung einer Aufgabe auf jene Gleichung $yy = nnx^4$ geleitet; so würden beyde Parabeln deswegen, weil sie den sogenannten Ort der Aufgabe ausmachen, zusammen gehören. Hievon ist die Anwendung leicht auf die logarithmische Linie zu machen. Ihre Gleichung $e^{x:a} = \frac{y}{b}$ ist für sich schon rational, und deswegen ist es nicht

38. Fig.

verstattet, sie zu quadriren, wofern es nicht wegen andrer Gründe geschehen muß. Diese sind aber vorhanden, wenn man sie als die Quadratricem der Hyperbel ansiehet, welche die möglichen Flächen der Hyperbel auf beyden Seiten ausdrücken soll.

59. §.

59. §.

Weil eine Stelle in H. d'Alemberts Opuscules T. I. pag. 222. noch in andrer Absicht merkwürdig ist, so will ich sie ebenfalls noch hersetzen. Der H. Verfasser trägt daselbst einen dem Ansehen nach; ihm wichtig scheinenden Zweifel gegen seine eigene Behauptung vor, und wundert sich gleichsam, daß bis dahin sonst niemand darauf verfallen sey.

„On pourroit faire contre l'argument tiré des aires hyperboliques une objection que voici, et qui paroit avoir echappé à tous ceux, qui ont jusqu'ici traité cette matiére. Soit $AP = x$, $PM = y$, $AC = a$, et $y = \frac{1}{(a-x)^n}$, n etant un nombre pair positiv; il est visible, 45. Fig.

que cette équation sera celle d'une hyperbole du degré n, qui aura pour asymtote CO, et dont les deux branches BMQ, qmb, seront du même coté de l'Axe Aa. Il est visible de plus, que l'integrale de ydx, ou l'aire

$$ABMP = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{(a-x)^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}}\right);$$ (in den Opuscules a. a. O. steht $-\frac{1}{a^n}$ vermuthlich wegen eines Druckfehlers anstatt $-\frac{1}{a^{n-1}}$) et comme les deux branches BMQ, qmb, appartiennent à une seule et même courbe, il semble que cette integrale devroit exprimer aussi l'aire AQqmp, dans laquelle Ap est > AC. *Cependent elle ne l'exprime pas.* Car quand x est > a, l'integrale précédente est toujours finie, au lieu, que l'aire AQqmp est infinie, étant composée des deux aires infinies ABQC, qmpc. Voila donc un exemple ou l'équation des aires n'est pas assujettie à la loi de continuité,

quoique celle des branches le ſoit. Or dira-t-on, ne pourroit-il pas en être de même de l'hyperbole équilatere? Wenn man mehrerer Deutlichkeit wegen 2m anſtatt n ſetzt, weil n eine grade Zahl ſeyn ſoll; ſo iſt $\int ydx = \frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{(a-x)^{2m-1}} - \frac{1}{a^{2m-1}}\right)$. Für poſitive x, ſo lange x oder AP < a bleibt, iſt dieſes Integral poſitiv, und wird ſchnell gröſſer, wenn x gröſſer wird: unter dieſer Bedingung alſo giebt das Integral die Gröſſe der Fläche ABMP, und in dem Fall $x = a = AC$ wird dieſe unendlich groß.

60. §.

Wird in eben dieſer Gleichung die Abſciſſe Ap > a genommen, ſo wird dieſes Integral negativ, und nimmt ab, wenn x oder Ap wächſt: daraus ergiebt ſich, daß die quadrirte Fläche nicht mehr zwiſchen AB und pm enthalten ſeyn könne, ſo wie ſie in dem Fall x < a zwiſchen AB und PM enthalten iſt. Demnach muß es an der andern Seite von pm nach s zu eine unveränderliche Ordinate geben, wo das negative Integral anfängt. Man nehme an, die Axe der Abſciſſen ſey auf beyden Seiten nach S und s bis ins Unendliche verlängert, auch verlängere man eben ſo in Gedanken die beyden dazu gehörigen Aeſte der krummen Linie nach V und v. Je gröſſer man Ap oder x nimmt, deſto kleiner wird zwar das negative Integral $\int ydx = \frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{(a-x)^{2m-1}} - \frac{1}{a^{2m-1}}\right)$, es erreicht aber alsdann die Gränze $-\frac{1}{2m-1}\cdot\frac{1}{a^{2m-1}}$, wenn man x $= \infty$ ſetzt, und das iſt die Fläche ABVS: alſo giebt es von p nach s zu keine Ordinate, wo dieſes Integral anfängt. Um nun dieſe Schlüſſe richtig weiter fortzuſetzen, muß man ſich erinnern, daß $x = \infty$ ſetzen eben ſoviel ſey, als

als den Punct p nach s rücken, der wegen der Natur der algebraischen Formuln so angesehen werden muß, als wenn er mit S einerley wäre; $+\infty$ ist mit $-\infty$ in der algebraischen Zeichensprache einerley, oder vielmehr das Zeichen ∞ stellet die Gränze zwischen einer positiv wachsenden, und darauf negativ wieder abnehmenden veränderlichen Grösse vor. Wenn Ap wächst, so wird sp kleiner, in dem Fall $Ap = \infty$ ist $sp = o$. Soll nun Ap negativ wieder abnehmen also p an der andern Seite von C in R fallen, so muß zugleich sp durch die Gränze o in den entgegen gesetzten Zustand SR übergehen: nun ist AR ein negativer Werth von x, und es ist $\int ydx = \frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{(a+AR)^{2m-1}} - \frac{1}{a^{2m-1}}\right)$. Dieser Werth ist kleiner als der, welcher mit der Gränze $x = \infty$ zusammengehörte, es muß also die Fläche ABNR gemeint seyn, die auch noch weiter abnimmt, wenn AR abnimmt, und alsdenn allererst verschwindet, wenn $AR = o$ ist. Aus diesem allen folgt, daß das Integral $\int ydx = \frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{(a-x)^{2m-1}} - \frac{1}{a^{2m-1}}\right)$, in dem Fall, wenn $Cp = x$ positiv und grösser als a genommen wird, eine Fläche ausdrücke, die sich von pm nach s hin über alle Gränzen hinaus, und wieder von s oder S durch R bis nach AB erstrecke. Einer ganz richtigen algebraischen Rechnung gemäß hängt also pmvs mit VSAB nach dem Gesetze der Stetigkeit zusammen.

61. §.

Man kann den Punct A in der Abscissenlinie wo man will nehmen, hiedurch wird die Constans a bestimmt.

Man

Man nehme ihn in S an, so ist $CS = a$ zwar unendlich groß, aber es wird auch zugleich $SP = x$ unendlich groß, und $CP = CS - SP = \infty - x$ bleibt eine endliche veränderliche Grösse. Einer solchen Abscisse SP ist nun auf der andern Seite sp entgegen gesetzt: denn wenn man $Cp = -CP$ nimmt, so ist $Cp = -\infty + x = -Cs + sp$.

Demnach ist nun $\int ydx = \frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{(CS-SP)^{2m-1}} - \frac{1}{CS^{2m-1}}\right)$, und in dieser Gleichung mag sich SP wie man will ändern, so bleibt doch allemahl $\frac{1}{CS^{2m-1}} = 0$, und man erhält $\int ydx = \frac{1}{2m-1} \cdot \frac{1}{(CS-x)^{2m-1}}$. Für $SP = x = 0$ ist dieses Integral $= 0$, es hat also seine Anfangsgränze im unendlich weit entfernten Punct S. Wenn $SP = x$ wächst, also CP abnimmt, so wächst dieses Integral, und behält so lange das Zeichen $+$, bis $x = CS$, oder $CP = 0$, und das Integral selbst unendlich groß wird. Indem man so von S nach C zu summirt, bleiben allemahl die Rechtecke ydx positiv, weil dx Incremente von SP sind. Soll nun P über C hinaus nach p rücken, so muß zugleich S in s fallen: denn es kann nicht CP durch 0 in $Cp = -CP$ übergehen, wenn nicht zugleich SP durch die Gränze ∞ in $-sp$ und CS in $-Cs$ übergehet, also ist nun $\int ydx = \frac{1}{2m-1} \cdot \frac{1}{(-Cs+x)^{2m-1}}$. Für $sp = 0$ ist dieses Integral $= -0$, eben wie es für $SP = 0$ war. Nun ist sp eine negative Abscisse und ihre Incremente sind negative dx. Indem man also von s nach p summirt, kommen keine andre als negative Rechtecke ydx in die Summe: daher ist nun

$\int ydx$

$\int ydx = \frac{1}{2m-1} \cdot \frac{1}{(-Cs+x)^{2m-1}}$ negativ, und dieser negative Werth wird grösser, wenn sp grösser, also Cp kleiner wird, bis zuletzt wenn $sp = Cs$, oder $Cp = o$ wird, das Integral $\int ydx$ die Gränze $-\infty$ erreicht.

62. §.

Hieraus wird es vollkommen begreiflich, was es für einen Erfolg haben muß, wenn in der allgemeinen Gleichung $\int ydx = \frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{(a-x)^{2m-1}} - \frac{1}{a^{2m-1}}\right)$ die Constans a eine endliche Grösse, und wie im 60. §. $a = CA$ angenommen ist. Hiedurch wird die Reihe der positiven Rechtecke ydx, die bey S anfangen und sich bey C endigen, um die Summe aller derjenigen vermindert, die bey S anfangen und sich bey A endigen, oder welches einerley ist, man vermindert die positive Fläche VSCO um das Stück VSAB. Wenn aber eine positive veränderliche Grösse mit einer andern nach dem Gesetz der Stetigkeit zusammen hängt, und o die Gränze zwischen beyden ist; so kann man die positive Grösse nicht um ein gewisses Stück vermindern, ohne daß man die damit zusammenhängende negative um eben dieses Stück vermehren würde. Vermindert man die positiven Abscissen einer krummen linie um die beständige Grösse b dadurch daß man den Anfangspunct der Abscissen um die Distanz b vorwärts rückt; so werden zugleich alle negative Abscissen um eben dieses Stück vermehrt. Vermindert man die positiven Ordinaten dadurch, daß man mit der vorigen Abscissenlinie eine andre in der Entfernung b parallel legt; so werden zugleich alle negative Ordinaten um einen Theil vergrössert, der $= b$ ist. Hievon macht man leicht die Anwendung auf die bisher betrachtete Integralformul, und die vermittelst derselben quadrirte Fläche. Die Theile

VSCO, vsCO, als algebraische Grössen betrachtet, gränzen im unendlich weit entfernten Punct S oder s aneinander. Wenn also anstatt der Gränze bey S oder s zwischen dem positiven und negativen eine andre AB angenommen wird; so bleibt nur ABCO positiv, ABVS aber kommt zum negativen hinzu. Die negative Fläche fängt bey AB an, und erstreckt sich durch S oder s, ferner durch r und p bis wieder an CO.

63. §.

Wenn man behaupten wollte, daß die Flächen der Hyperbel der Ordnung $2m+1$, wozu die Gleichung $y = \frac{1}{(a-x)^{2m}}$ gehört, nicht nach dem Gesetz der Stetigkeit zusammen hängen; so hiesse das zugleich behaupten, daß die Aeste ihrer Quadraticis nicht nach dem Gesetz der Stetigkeit zusammen hängen. Setzt man $\int y dx = z$, so ist $z = \frac{1}{2m-1} \cdot \left(\frac{1}{(a-x)^{2m-1}} - \frac{1}{a^{2m-1}} \right)$ die Gleichung der Quadraticis. Es sey WV die Abscissenlinie, A der Anfangspunct $AC = a$, $AT = x$, $TM = z$, so wächst TM so lange bis T in C fällt, und CK auch rückwärts nach L verlängert wird eine Asymtote. Wird $At > AC$ genommen, so wird $z = tm$ negativ, und tm nimmt ab, wenn At wächst, so lange bis mit $At = \infty$ die Ordinate $VY = -\frac{1}{a^{2m-1}}$ zusammen gehört. Auch $AW = -\infty$ giebt $WZ = -\frac{1}{a^{2m-1}} = VY$, also sind WV, ZY, parallel, und ZY ist die andre Asymtote. Wird $AW = -x$ kleiner, so wird zugleich WZ kleiner, bis endlich AW und WZ zugleich verschwinden. Die Abscissenlinie liegt mit der Asymtote ZY in der Entfernung $WZ = \frac{1}{a^{2m-1}}$

47. Fig.

parall-

parallel. Wäre ZY selbst die Abscissenlinie; so würden mit gleichen Abscissen DF und DE = — DF, oder ZF und YE = — ZF gleiche und entgegen gesetzte Ordinaten zusammen gehören. Durch Verrückung der Abscissenlinie von ZY nach WV werden alle positive Ordinaten um das Stück WZ = $\frac{1}{a^{2m-1}}$ vermindert, und zugleich alle negative Ordinaten um eben soviel vergrössert. Wird m = 1 gesetzt, so gehört $y = \frac{1}{(a-x)^2}$ für die Hyperbel der dritten Ordnung, und die Quadratix, wozu die Gleichung $z = \frac{1}{x-a} - \frac{1}{a}$ gehört, ist die apollonianische Hyperbel. Soviel ich weiß, ist es nie bezweifelt worden, daß die Aeste der letztern nach dem Gesetz der Stetigkeit zusammen hängen, so wie es auch niemand bezweifelt, wenn von den Aesten der übrigen Hyperbeln die Rede ist.

64. §.

Aus dem übrigen Inhalte der beyden im 7. §. schon angeführten Abhandlungen des H. d'Alembert muß ich noch einiges von dem auszeichnen, was der H. Verfasser theils dem H. Euler, theils dem Herrn de Foncenex entgegen gesetzt hat, weil dieser in den Miscellaneis Societatis privatae Taurinensis Tom. I. dem H. Euler in der Hauptsache beypflichtet. Dem Bernoullischen Beweise aus der Differentialgleichung $\frac{-dx}{-x} = \frac{+dx}{+x}$ (45. §.) hatte H. Euler unter andern entgegen gesetzt, man könne eben so beweisen, daß lnx = lx sey, weil man auch $d.lnx = \frac{ndx}{nx} = \frac{dx}{x} = d.lx$ findet; ein Satz von dem Hr. Euler sagt, daß ihn Hr. Bernoulli selbst ohne Zwei-

fel

fel für falsch erklären würde, und den ja wohl ein jeder für falsch erklären muß. Inzwischen thut es Hr. d'Alembert nicht, sondern er sagt ausdrücklich: je ne vois pas ce que cette conséquence avoit de choquant. So wie er sich aber darüber erklärt, hat freylich der Satz $lnx = lx$ nichts anstössiges, wenn nämlich von verschiedenen Systemen die Rede ist: in einem und eben demselben System kann doch wohl unmöglich $lnx = lx$ seyn, und eben dieses ist es, was aus der obgedachten Art zu schliessen folgen würde. Hr. d'Alembert selbst will ja auch nebst dem Hrn. Bernoulli auf diese Art beweisen, es sey log. nat. $-x$ = log. nat. $+x$. Doch es wird darauf ankommen, was Hr. d'Alembert beybringt, um dieses alles zu rechtfertigen.

En effet (so heißt es auf der 194 Seite) qu'est-ce que lx en regardant x comme l'ordonnée d'une Logarithmique? c'est *le logarithme du rapport* de x à une ordonnée b, que l'on prend pour unité (Hr. d'Alembert nimmt also an dieser Stelle selbst den Begriff eines Logarithmen so an, wie ich mich oben im 16. §. darüber erklärt habe). Qu'est ce que lnx? C'est en general le logarithme du rapport de nx à une ligne quelconque c, que l'on prend pour l'unité. Si on fait $c = b$ on trouvera aisément, que log. $\frac{nx}{c} = l\frac{x}{b} + l\frac{n}{b}$, ou $lnx = lx + ln$; mais si on fait $c = nb$, on aura $l\frac{nx}{nb} = l\frac{x}{b} = lx$. En general il est évident, que si on prend ln pour zero, ou ce qui revient au même, si on prend n pour representer l'unité, lnx sera égal au logarithme de x. Pourquoi donc en prenant -1 pour representer l'uni-

l'unité, c'est a dire, pour le nombre dont le log. = o, n'auroit-on pas lnx = l — x = lx?

Ich kann nicht finden, daß dieses alles mehr sagen wolle, als soviel: die Logarithmen sind gleich, wenn die Verhältnisse gleich sind. Nach der eigenen Erklärung des Hrn. d'Alemberts, die an dieser Stelle wenigstens sehr deutlich angetroffen wird, will nun die Gleichung l — x = l + x nichts anders sagen, als es sey $l\frac{-x}{-1} = l\frac{+x}{+1}$.

Hr. d'Alembert giebt nämlich zu, daß lnx nicht = lx seyn könne, wenn die Einheiten einerley sind, womit man x und nx vergleicht. Dagegen sagt er, wenn die Einheit, womit x verglichen wird = b, diejenige aber, womit man nx vergleicht = nb genommen werde, so sey lx = lnx; das heißt nach seiner eigenen Erklärung $l\frac{nx}{n} = l\frac{x}{1}$.

Hierauf folgt nun der Zusatz: wenn also n = — 1, oder — 1 selbst die Einheit ist, womit man nx, also nun — x, vergleicht, warum sollte nicht lnx = l — x = lx seyn? demnach kann diese Frage nichts anders, als so viel sagen wollen: warum sollte nicht $l\frac{nx}{n} = l\frac{-x}{-1} = l\frac{x}{1}$ seyn? das hat Niemand bestritten, und es wird nie bestritten werden.

65. §.

Hr. Euler hatte gesagt, wenn man die Gleichung lnx = lx gelten lasse, so bestehe die logarithmische Linie nicht aus zweyen, sondern unzählig vielen Stücken. Auch diese Folge läugnet Hr. d'Alembert, und setzt die Ursache hinzu: wenn man lnx = lx setze, so verrücke man nur den Anfangspunct der Abscissen. Allein so viel ich einsehe, wird hiedurch der Sinn der Streitfrage wiederum vom Hrn. d'Alembert ganz verändert. Bey ihm ist lnx so viel

als $l\frac{nx}{n}$; wenn nun in der logarithmischen Linie BMN,

44. die Ordinate PM = x, AB = 1, also AP = lx ist; wenn
Fig. ferner LN = nx und GH = n ist, so ist freylich GL =
$AP = l\frac{LN}{GH} = l\frac{nx}{n}$, also AP = lnx — ln oder AP + ln
= lnx = GL + ln. Will man nun wieder x statt nx schreiben, und die Gleichung GL + ln = lx statt der vorigen AP = lx nehmen, so heißt dieses freylich nur, den Anfangspunct der Abscissen von A nach G rücken. Aber beym Hr. Euler heißt lnx nicht so viel als $l\frac{nx}{n}$, sondern vielmehr so viel als $l\frac{nx}{1}$, wo eben diejenige Einheit verstanden werden muß, womit man x vergleicht. Wäre nemlich der Schluß richtig $\frac{-dx}{-x} = \frac{+dx}{+x}$, also l — x = l + x, so müßte man auch schliessen können, $\frac{ndx}{nx} = \frac{dx}{x}$, also lnx = lx, was auch n bedeutet. Es kann demnach n jede Linie bedeuten, die von derjenigen unterschieden ist, welche man = 1 gesetzt hat: und wenn dieses ist, so wird die Gleichung AP = lnx für jede Abscisse unzählig viele Ordinaten geben, also die Linie unstreitig unzählig viele verschiedene Aeste bekommen. Uebrigens ist es eine allgemein bekannte Sache, daß zwar eine und eben dieselbe logarithmische Linie unzählig viele Logarithmensysteme ausdrücken könne, aber aus keiner andern Ursache, als weil man bey der ersten Voraussetzung die Freyheit hat, die Subtangente, oder welches auf eins hinaus läuft,

den

den Logarithmen eines angenommenen Verhältnisses durch jede beliebige Zahl auszudrücken. Es ist aber auch ferner ausgemacht, daß sich das System sogleich ändere, wenn man die Subtangente, oder auch den Logarithmen eben desselben Verhältnisses, durch eine andere Zahl ausdrückt. Wenn also in dem ersten System $\lambda = l\frac{x}{1}$ gewesen ist, so kann in dem zweyten $\lambda = l\frac{nx}{1}$ seyn. Aber alsdenn ist in dem zweyten nicht mehr $\lambda = l\frac{x}{1}$, wofern man nicht glauben will, es könne im briggischen System $l10 = l2 \times 10 = l3 \times 10 = l4 \times 10$ u. s. f. seyn. Es sey also in dem zweyten System $L = l\frac{x}{1}$, die Basis des ersten e, die Basis des zweyten b, so wird $e^{\lambda} = x$, und $b^{L} = x$. Wenn nun $b = e^{\mu}$ ist, so wird $e^{\lambda} = e^{\mu L}$, folglich $\lambda = \mu L$, oder $L = \frac{\lambda}{\mu}$: mithin wird der Modulus des zweyten Systems $= \frac{1}{\mu}$, wenn der Modulus des ersten $= 1$ ist. Alles dieses sind ganz bekannte und unläugbare Sätze: also wird der Satz, daß $lx = lnx$ seyn könne, wenn man ihn so erklärt, wie ihn ein Jeder natürlicher Weise verstehen wird, nur zugegeben seyn, wenn von verschiedenen Systemen die Rede ist. Es scheint, daß Hr. d'Alembert dieses auch endlich selbst eingestehe, er setzt aber hinzu, wenn gleich zugegeben würde, daß die Voraussetzung $lnx = lx$ nur von verschiedenen Systemen gelte, so würde doch nicht folgen, daß es auch noch bey der Voraussetzung $l - x = l + x$ wahr sey: denn er habe das Ge-

gentheil bewiesen. Hr. d'Alembert hat aber, wie aus meinem bisherigen Vortrage erhellet, nichts weniger bewiesen, als daß $l\frac{-x}{+1} = l\frac{+x}{+1}$, wohl aber, daß $l\frac{-x}{-1} = l\frac{+x}{+1}$ sey, und das ist es gar nicht, worauf hier die Sache ankommt.

65. §.

Wenn Hr. Bernoulli behauptet hatte, es sey $l-1 = l+1 = 0$, so folgert Hr. Euler daraus, es müsse demnach auch $l\sqrt{-1} = 0$, $l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = 0$ seyn u. s. f., womit aber die sonst bekannten Lehren von den unmöglichen Grössen nicht bestehen können. Hr. d'Alembert findet auch in diesen Folgen nichts ungereimtes, und seine Aeusserung darüber auf der 195. S. ist folgende.

En effet tout système de Logarithmes est arbitraire en soi; et il est clair, que 0, 0, 0, 0, etc. formant une progression Arithmetique, je puis au dessus d'une progression Géométrique quelconque imaginer une suite de zeros, qui seront chacun les logar. du nombre qui leur répond. Ainsi posant 0 pour le Logarithme de 1 et de -1. j'aurai 0 pour le Logarithme de $\sqrt{-1}$ et de $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

Aber heißt das nicht wieder den Sinn der Streitfrage ganz verändern? Die Frage ist nicht; ob sich ein System angeben lasse, worinn $l+1 = l-1 = l\sqrt{-1}$ etc. $= 0$ sey; es ist vielmehr die Frage, ob in den gebräuchlichen Systemen, im Natürlichen, Briggischen und andern, die davon nach einem beständigen Modulo abhängen $l-1$, $l\sqrt{-1}$, und s. f. $= 0$ sey. Auf die Art kann man behaupten, es sey $23.12 = 1002$; und wenn

wenn jemand entgegen setzt, dieses sey wider alle Rechnungsregeln, so darf man nur folgendes antworten. Die Art, wie wir unsere Zahlen schreiben, ist ganz willkührlich, anstatt dessen, daß man die ersten neun Zahlen durch einfache Ziffern ausdrückt, kann man auch, wie Weigel gewiesen hat, die ersten drey Zahlen durch einfache Ziffern ausdrücken, und alsdenn die Werthe der Classen von der rechten gegen die linke Hand in ratione quadrupla steigen lassen, wenn sie gleich sonst in ratione decupla steigen. Dann aber ist 23 = eilf, und 12 = sechs; aber sechsmal eilf ist sechs und sechzig, und eben soviel drückt die Ziffer 1002 bey der angenommenen Voraussetzung aus. So wenig hiedurch dargethan werden kann, daß nach dem einmal eingeführten decadischen Algorithmen 23. 12 = 1002 sey: eben so wenig beweisen auch die Schlüsse des Hrn. d'Alembert, daß in den gebräuchlichen Systemen $l-1$, $l\sqrt{-1}$, u. s. f. = 0 sey, und dieses ist es doch eigentlich, was geläugnet wird.

Hr. Euler schließt weiter, wenn $l\sqrt{-1} = 0$ sey, so müsse der Satz falsch seyn, davon selbst Hr. Bernoulli der Erfinder ist, daß der Halbmesser sich zum Quadranten verhalte, wie $\sqrt{-1} : l\sqrt{-1}$, und hierauf erwiedert Hr. d'Alembert folgendes. Si dans cette proposition $l\sqrt{-1}$ n'est pas = 0, mais imaginaire, cela vient du systéme de Logarithmes, que l'on suppose dans l'équation entre les arcs de cercle z et leurs sinus x. En effet $dz = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ donne $dz = \frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{(xx-1)}} = \frac{-dx}{\sqrt{-1}.\sqrt{(xx-1)}}$; d'ou l'on tire $z = \frac{1}{\sqrt{-1}} l \frac{\sqrt{-1}}{x+\sqrt{(xx-1)}}$. Cette equation appartient a un systéme de Logarithmes tel, 1) que la soutangente de la

Logarithmique, qui le repreſente, ſoit $\frac{1}{\sqrt{-1}}$, c'eſt à dire imaginaire, 2) que le Logarithme de $\frac{\sqrt{-1}}{x+\sqrt{(xx-1)}}$ ſoit imaginaire en donnant à x toutes les valeurs poſſibles depuis o jusqu'a l'unité. C'eſt un ſyſtéme, qui n'a rien de commun avec l'équation de la Logarithmique $x = ly$, dans laquelle y eſt ſuppoſée toujours réelle. Allein, entweder die Integration iſt falſch, oder das l bedeutet hier den natürlichen Logarithmen von $\frac{\sqrt{-1}}{x+\sqrt{(xx-1)}}$, und das Syſtem mag durch den Modul $\frac{1}{\sqrt{-1}}$, verändert werden, wie es wolle, ſo muß doch durch die Diviſion mit dieſem Modul das natürliche Syſtem wieder herauskommen, alſo $z\sqrt{-1} = \text{log. nat.} \frac{\sqrt{-1}}{x+\sqrt{(xx-1)}}$ ſeyn, welches für $x = 1$ dieſe Gleichung giebt $\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1} = \text{log. nat.}\sqrt{-1}$, mithin giebt Hr. d'Alembert hier zu, daß log. nat. $\sqrt{-1}$ nicht $= o$ ſey.

67. §.

Wenn man im 36. §. $a = 1$ ſetzt, ſo iſt daſelbſt $f = 1 - a$, $l = \text{log.} + 1 = o$, und die daſelbſt gefundene Gleichung verwandelt ſich in folgende $1 + \frac{f}{m} = \text{cos.}\frac{2k+1}{m}\pi \pm (\text{ſin.}\frac{2k+1}{m}\pi)\sqrt{-1}$. Eben dieſe Gleichung findet H. Euler in ſeiner oben ſchon angeführten Abhandlung: was bey ihm y und n iſt, das iſt hier f und m, anſtatt $2k+1$, welches hier überhaupt eine ungrade Zahl vorſtellet, ſchreibt H. Euler $2\lambda - 1$. Wenn alſo

also diese Eulerischen Zeichen gebraucht werden; so hat man $1+\frac{y}{n}=\text{col.}\frac{2\lambda-1}{n}\pi\pm(\text{sin.}\frac{2\lambda-1}{n}\pi)\sqrt{-1}$. Die daraus im 36. §. ferner hergeleitete Gleichung giebt $f=\pm(2k+1)\pi\sqrt{-1}$, also nach H. Eulers Bezeichnung $y=\pm(2\lambda-1)\pi\sqrt{-1}$. Aus jener Gleichung aber soll nach H. d'Alembert (a. a. O. 197. §.) auch $y=0$ folgen, und das kurz und gut deswegen, weil $1=1$ daraus wird, wenn man $y=0$ und $n=\infty$ setzt. Dergleichen Arten mit Gleichungen umzugehen befremden ganz ungemein in einer Abhandlung, die einen d'Alembert zum Verfasser hat. Man kann ja eben so gut y jeder völlig willkührlich gewählten endlichen Zahl gleich und $n=\infty$ setzen, man erhält immer $1=1$. Eben so sehr befremdet es, wenn Herr d'Alembert aus der Gleichung $1+\frac{y}{n}=\text{col.}\frac{2\lambda-1}{n}\pi\pm(\text{sin.}\frac{2\lambda-1}{n}\pi)\sqrt{-1}$ den Werth $y=0$ noch auf eine andre Art so herleiten will. „Man setze $\lambda=n=\infty$, so hat man $1+y:n=\text{col.}\,2\pi\pm\sqrt{-1}\,\text{sin.}\,2\pi$, oder $1+y:n=1$, also $y=0$.„ Nein; man hat $1+\frac{y}{n}=\text{col.}(2\pi-\frac{\pi}{n})\pm(\text{sin.}(2\pi-\frac{\pi}{n}))\sqrt{-1}$), und es ist $\text{col.}(2\pi-\frac{\pi}{n})=1$, $\text{sin.}(2\pi-\frac{\pi}{n})=-\text{sin.}\frac{\pi}{n}=-\frac{\pi}{n}$: also wird vielmehr $1+\frac{y}{n}=1\pm\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}$, und das giebt $y=\pm\pi\sqrt{-1}$. Hr. d'Alembert wuste gewiß sonst besser, daß es sehr bekannten Rechnungsregeln zuwider sey, das unendlich kleine so wie

er es hier macht, an der einen Seite der Gleichung beyzubehalten, und an der andern Seite wegzulassen. Ja selbst alsdenn, wenn die Gleichung $1+y:n=1$ auch richtig aus der Voraussetzung folgte, würde man doch nichts weiter als $y=0.n$ daraus schliessen können, welches ein ganz unbestimmter Werth ist, den man keinesweges so schlechthin $=0$ setzen kann. Ueberdem ist die Voraussetzung $\lambda=n=\infty$ ganz wider die Natur der Sache, sie widerspricht den Gründen worauf die ganze Rechnung gebauet ist. Wenn auch n eine endliche Zahl wäre, so müste doch λ nie grösser als $\frac{1}{2}n$ genommen werden: soll aber n unendlich groß werden, so muß $\frac{\lambda}{n}$ keinen endlichen Werth erreichen. (35. §.)

68. §.

Gegen den Satz selbst, daß jede Zahl unzählig viele algebraische Logarithmen habe, und gegen den Beweis desselben, womit Hr. Euler ihn bestätiget, bringt Hr. d'Alembert an der angezogenen Stelle weiter keinen Zweifel vor; inzwischen ist er doch nicht so schlechterdings mit dem Hrn. de Foncenex zufrieden, welcher in den Miscellaneis societatis privatae Taurinensis der Lehre des Hrn. Euler beytritt: er setzt ihm in dem Supplement au memoire sur les logarithmes des quantités négatives, auf der 210. und f. S. der Opuscules Mathematiques solche Zweifel entgegen, die auch gewissermassen wider die Theorie des Hrn. Eulers gerichtet sind. Allein wofern man den algebraisch richtig geführten Beweisen das nicht absprechen will, was ihnen doch sonst allgemein zugestanden wird, daß sie eben die Ueberzeugung bewirken, wie die reinen geometrischen Beweise; so kann man zum voraus versichert seyn, daß dergleichen Zweifel nur von einem Mißverstande herrühren müssen. Ich werde in meinem folgen-

folgenden Vortrage diesen Zweifeln ebenfalls abzuhelfen suchen: nur eine Bemerkung will ich beyfügen, welche die Art betrift, wie man am besten und sichersten eine solche Gleichung zu behandeln hat, worin für eine veränderliche Grösse eine ihrer Gränzen o oder ∞ gesetzt werden soll, um zu erfahren, was sie alsdenn für eine Form annehme. Bevor man noch die Voraussetzung macht, daß die veränderliche Grösse eine dieser Gränzen erreichen solle, muß man der Gleichung eine solche Form geben, daß man zum voraus sehen kann, wenn für die veränderliche Grösse ihre Gränze gesetzt wird, es müsse eine Gleichung übrig bleiben, die kein unendlichkleines oder unendlichgrosses weiter enthält, ohne daß diejenige Grösse mit aus der Rechnung wegfalle, die man eigentlich zu bestimmen suchte. Ich habe im 35. §. dieses Verfahren umständlich auf die Gleichung angewandt, woraus $f = 1 + a$ gefunden werden sollte, auch im 36. §. weil es nicht nöthig war alles wieder aus dem 35. §. abzuschreiben kurz bemerkt, daß man eben so mit der Gleichung umgehen müsse, aus welcher $1 - a$ gefunden werden sollte: hier will ich zum Ueberfluß die Anwendung auch auf die Eulerische Gleichung machen, woraus $y = 1 - 1$ gefunden werden soll. Sie ist $1 + \frac{y}{n}$

$= \text{col.}\frac{2\lambda - 1}{n}\pi \pm (\text{sin.}\frac{2\lambda - 1}{n}\pi)\sqrt{-1}$, und das n mag seyn was es will, so folgt aus dieser Gleichung $y = n\,\text{col.}\frac{2\lambda - 1}{n}\pi \pm (n\,\text{sin.}\frac{2\lambda - 1}{n}\pi)\sqrt{-1} - n$, oder

$$y = \pm (n\,\text{sin.}\frac{2\lambda - 1}{n}\pi)\sqrt{-1} - n(1 - \text{col.}\frac{2\lambda - 1}{n}\pi).$$

Es ist aber $1 - \text{col.}\frac{2\lambda - 1}{n}\pi = \text{sinv.}\frac{2\lambda - 1}{n}\pi =$

$2\left(\sin.\frac{2\lambda-1}{n}\pi\right)^2$, also erhält man $y=\pm$

$\left(n\sin.\frac{2\lambda-1}{n}\pi\right)\sqrt{-1}-2n\left(\sin.\frac{2\lambda-1}{n}\pi\right)^2$. Nun allererst ist es Zeit $n=\infty$ zu setzen, so wird die Gränze $n\sin.\frac{2\lambda-1}{n}\pi=(2\lambda-1)\pi$, und man findet $y=\pm$

$(2\lambda-1)\pi\sqrt{-1}-2(2\lambda-1)\pi.\sin.\frac{2\lambda-1}{n}\pi.$ Weil nun der zweyte Theil dieser Formul wegen des Factors $\sin.\frac{2\lambda-1}{n}\pi$ nichts anders als o ist, so hat man $y=$ $\pm(2\lambda-1)\pi\sqrt{-1}$, wie es H. Euler findet, und wie es auch aus der allgemeinen Formul im 36. §. folgt, wenn $l=l+a$, hier $=l+1=0$ gesetzt wird.

Man rechnet freylich gewöhnlich etwas flüchtiger bey Untersuchungen dieser Art, man hält sich an die allgemein bekannten Regeln, das Unendlichkleine verschwinde gegen das Endliche, das Endliche eben so gegen das Unendlichgrosse u. s. w. (worüber ich mich in der voranstehenden 1. Abhandlung umständlicher erklärt habe). Geübte Analysten können allerdings nach diesen Regeln richtig rechnen, und Herrn Eulers Schriften zeugen davon durchgängig: mir ist darin bisher kein Exempel einer fehlsamen Anwendung jener gemeinen Regeln der sogenannten Rechnung des Unendlichen vorgekommen. Daß sie bey dem allen doch grosse Rechner zu Fehlschlüssen verleiten können, und nur gar zu leicht verleiten, wenn sie den wahren eigentlichen Sinn dieser Regeln nicht immer vor Augen behalten: davon giebt der Inhalt des 67. §. ein merkwürdiges Beyspiel.

69. §.

69. §.

Eine algebraisch unmögliche Grösse kann man eben darum nicht durch eine geometrische Construction darstellen, weil die Formul fodert, daß etwas geleistet werden soll, was wegen andrer Bedingungen, die mit in der vorgelegten Aufgabe liegen, nicht geleistet werden kann. Wenn aber die unmögliche algebraische Grösse unter einer Form, wie $b\sqrt{-1}$ vorgelegt ist, so kann man den möglichen Factor b geometrisch darstellen: genug wenn man bemerkt, daß die so dargestellte geometrische Grösse das noch nicht sey, was man suchte. Selbst $b\sqrt{-1}$ kann durch entgegen gesetzte geometrische Operationen wieder in ein mögliches b oder bb verwandelt werden, und hiernächst bey andern Constructionen als mögliche Grösse dienen. Für die Hyperbel hat man die bekannte Gleichung $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$ und man nennt 2b ihre zugeordnete Axe, so wie 2a die Zwergaxe, wenn gleich die Hyperbel in dem Sinne, wie es hier gemeint ist, keine zugeordnete Axe hat, so wie auch die Gleichung $yy = -bb$ für $x = 0$ anzeigt, daß $y = b\sqrt{-1}$ unmöglich sey. Inzwischen zeichnet man doch eine grade Linie $= b$ auf der Zwergaxe im Mittelpunct senkrecht, nicht anders als wenn es die halbe zugeordnete Axe wäre, und das um deswillen, weil diese grade linie, die ein mögliches b vorstellet, bey andern Constructionen dienen kann, um das gesuchte zu finden. Ein bekanntes ganz leichtes hieher gehöriges Exempel ist, wenn aus beyden a und b die Excentricität der Hyperbel $f = \sqrt{(aa + bb)}$ gefunden werden soll. Man betrachtet die Sache so, als wenn b eine Applicate der Hyperbel im Mittelpunct wäre, und in einem ähnlichen Sinne lassen sich auch andre unmögliche Applicaten der Hyperbel zwischen beyden Scheitelpuncten, oder vielmehr nur die möglichen Factoren der unmöglichen algebraischen Formuln für diese Applicaten, geometrisch darstellen.

70. §.

46. Fig. Es sey die gleichseitige Hyperbel wie gewöhnlich zwischen ihren Asymtoten, TV, XY, verzeichnet, und die halbe Zwergaxe CA, welche der halben zugeordneten Axe CE in dem Sinne gleich ist, wie es im 69. §. bemerkt ward, sey $= 1$ angenommen; ferner sey $MP = y$ eine rechtwinklichte Applicate, womit auf der Zwergaxe die Abscisse $CP = x$ zusammen gehört: so hat man für die Hyperbel die Gleichung $y = \pm\sqrt{(xx - 1)}$. Man weiß, daß beyde Werthe nur so lange möglich sind, als $+x > +1$ und $-x > -1$ genommen wird: inzwischen nehme man $CQ < 1$, so wird $y = \pm\sqrt{(CQ^2 - 1)} = \pm\sqrt{(1 - CQ^2)}\sqrt{-1}$. Man mache die Applicate $QG = \mp\sqrt{(1 - CQ^2)}$ und $QH = -\sqrt{(1 - CQ^2)}$, so wird die der Abscisse $x = CQ$ zugehörige Applicate $y = \pm QG\sqrt{-1}$ und $\pm QG = \frac{y}{\sqrt{-1}} = -y\sqrt{-1}$. Diesemnach ist QG eine unmögliche Applicate der Hyperbel in eben dem Verstande, in welchem man sonst von einer unmöglichen halben zugeordneten Axe der Hyperbel redet; es wird nämlich $y = \pm\sqrt{-1}$ für $x = 0$, oder $y = \pm 1.\sqrt{-1}$. Nimmt man nun $CE = CF = 1$, so wird $y = \pm CE\sqrt{-1}$, und $\pm CE = \frac{y}{\sqrt{-1}} = -y\sqrt{-1}$. Auf eben die Art kann man für alle x, die zwischen den Gränzen $+1$ und -1 fallen, die dazu gehörigen Applicaten zeichnen, welche zwar an sich mögliche Gröſſen sind, aber deßwegen hier als unmögliche Gröſſen in der Rechnung vorkommen, weil sie die Hyperbel nicht schneiden können, und eben darum als Applicaten der Hyperbel betrachtet unmöglich sind. Man setze $z = \pm\sqrt{(1 - xx)}$, so wird für die Hyperbel $y = z\sqrt{-1}$, aber $z = \pm\sqrt{(1 - xx)}$ ist eine Gleichung für den Kreis, welcher aus dem Mittelpunct C mit dem Halbmesser $CA = 1$ beschrieben werden kann. Alle Applica-

plicaten dieses Kreises sind unmögliche Applicaten der Hyperbel, weil $z = \frac{y}{\pm\sqrt{-1}} = \mp y\sqrt{-1}$ ist: aber auch umgekehrt, alle Applicaten der Hyperbel sind unmögliche Applicaten des Kreises, weil $y = z\sqrt{-1}$ ist. Hieraus folget, daß der Kreis ein unmögliches Stück der Hyperbel sey, so wie die Hyperbel ein unmögliches Stück des Kreises ist.

71. §.

Der Kreis hängt mit der Hyperbel in zweenen Puncten A und B zusammen: deswegen giebt es Bogen, die in der Hyperbel den einen Endpunct wie M, und im Kreise den andern Endpunct G haben. Alle Bogen von dieser Art können sowohl unmögliche Bogen des Kreises, als auch unmögliche Bogen der Hyperbel heissen. Beyde krumme Linien haben bey A und B eine gemeinschaftliche Tangente, und bilden bey diesen Puncten zwey entgegen gesetzte Spitzen MAG, NAH, ingleichen mBF, nBE. Weil überdem alle die Bogen, welche in A sowohl, als auch in B zusammen stossen, durch eine gemeinschaftliche Gleichung ausgedrückt werden, so ist jeder von den vier Bogen, die in A oder B zusammen stossen, als die Fortsetzung eines jeden der drey übrigen anzusehen. Zwischen jeden zweyen Puncten also, davon der eine in der Hyperbel, der andre im Kreise liegt, fallen unzählig viele verschiedene Bogen; zwischen M und G hat man folgende:

MAG, MAGEBFHAG, und überhaupt MAG + $2\lambda\pi$ ferner auch diese

MAHFBEG, und überhaupt MAHFBEG + $2\lambda\pi$, wo λ und π die oben schon gebrauchte Bedeutung haben. Wenn nun der Ausdruck Arc. Abſc. x ganz allgemein jeden Bogen bezeichnen soll, welcher in A anfängt, und da aufhört, wo die zu x gehörige Ordinate PM, oder PN die

Hyper-

Hyperbel trift; so gehören dahin unzählig viele verschiedene Bogen, nämlich alle folgende:

AM, AEBFAM, AEBFAEBFAM u. s. w. ingleichen AM, AFBEAM, AFBEAFBEAM, u. s. w.

Hat man die Bogen, welche sich von A durch E erstrecken, mit + bezeichnet, so muß man diejenigen, welche sich von A durch F erstrecken mit — bezeichnen: also gehören dahin alle Bogen, welche der Ausdruck $\pm\lambda$AEBFA+AM allgemein bezeichnet, da dann alle ganze Zahlen, o. 1, 2, 3, und so ferner fort nach der Ordnung für λ gesetzt werden können. Die graden Linien CA, CM, begränzen mit dem Bogen, welcher in A anfängt und sich in M endiget, einen Ausschnitt, welcher eben so wie der Bogen mit der Abscisse x zusammen gehört: also kann der Ausdruck Sect. Absc. x einen solchen Ausschnitt ebenfalls ganz allgemein bezeichnen, und es sind unzählig viele verschiedene Ausschnitte, die insgesammt dahin gehören.

72. §.

Man weiß aus den bekannten Eigenschaften der Hyperbel, daß d. Sect. ACM $= \frac{dx}{2\sqrt{(xx-1)}} =$

$\frac{dx}{2\sqrt{(1-xx)}\sqrt{-1}}$ sey: das ist also nicht allein ein Differential des Ausschnittes, dem der Bogen AM zugehört, sondern eines jeden andern, dem einer von den übrigen Bogen zugehört, die sich von A bis M erstrecken. Um das allgemein auszudrücken, setze man d. Sect. Absc. x

$= \frac{dx}{2\sqrt{(xx-1)}} = \frac{dx}{2\sqrt{(1-xx)}\sqrt{-1}} = \frac{-dx\sqrt{-1}}{2\sqrt{(1-xx)}}$,

so giebt die Integration Sect Absc. $x = \frac{1}{2}l(x+\sqrt{(xx-1)})$

$= \frac{1}{2}$(Arc. cos. x)$\sqrt{-1}$ = (Sect. cos. x)$\sqrt{-1}$,

Alle diese Formuln werden $=0$, wenn man $x=1$ sezt, deßwegen wird keine beständige Grösse zugesezt: ausser dem Werth 0 giebt es aber für Arc. cos. x und Sect. cos. x noch unzählig viele andre Werthe, wenn $x=1$ gesezt wird, so wie eben diese Formuln in jedem andern Fall unzählig viele verschiedene Werthe haben können, wenn für die veränderliche Grösse x ein andrer bestimmter Werth angenommen wird. Aus der Gleichung $\frac{1}{2}l(x+\sqrt{(xx-1)})=\sqrt{-1}$. Sect. cos. x erhält man $l(x+\sqrt{(xx-1)})=2(\text{Sect. cos. } x)\sqrt{-1}$. So lange $x<1$ bleibt, ist Sect. cos. x ein möglicher Kreisausschnitt, aber ein unmöglicher Ausschnitt der Hyperbel: daher hat man $\text{Sect. cos. } x=\frac{l(x+\sqrt{(xx-1)})}{2\sqrt{-1}}$. Weil nun ganz allgemein Sect. cos. $1=\pm\lambda\pi$ ist, so erhält man $l1=\pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$, und diese Formul giebt alle mögliche hyperbolische Sectoren, die in dem Punct A anfangen, und in demselben Punct sich wieder endigen. Diese Sectoren sind

AEBFA, 2 AEBFA, 3 AEBFA, u. s. w. oder
AFBEA, 2 AFBEA, 3 AFBEA, u. s. w.

Wenn $x>1$ genommen wird, so hat man $l(x+\sqrt{(xx-1)})=2$ Sect. Absc. x, das ist, $l(x+\sqrt{(xx-1)})$ hat folgende Werthe: 2 ACM; 2 ACM $\pm$ 2 Sect. AEBFA; 2ACM $\pm$ 4 Sect AEBFA; u. s. w. oder 2ACM; 2 ACM $\pm 2\pi\sqrt{-1}$; 2 ACM $\pm 4\pi\sqrt{-1}$; u. s. w. also überhaupt $lx+\sqrt{(xx-1)}=2\,\text{ACM}\pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$, welches mit der algebraischen Rechnung (35. §) völlig übereinstimmt.

73. §.

Die Formul $x+\sqrt{(xx-1)}$ kann eine jede positive mögliche Zahl, die >1 ist, ausdrücken, und man kann x allemahl so nehmen, daß $x+\sqrt{(xx-1)}$ einer Zahl von dieser Art gleich wird. Soll $x+\sqrt{(xx-1)}=1+A$ seyn,

seyn, so wird $\sqrt{(xx-1)} = 1+A-x$, und wenn man quadrirt, so erhält man $xx-1 = (1+A)^2 - 2x(1+A)+xx$, wo xx nothwendig allemahl heraus fällt, so daß $x = \frac{(1+A)^2+1}{2(1+A)} = 1 + \frac{AA}{2(1+A)}$, mithin allemahl grösser als 1 wird. Weil ferner die Wurzelgrösse $\sqrt{(xx-1)}$ ihrer Natur nach zweydeutig ist, so kann man sie auch negativ nehmen, und überhaupt 2Sect. Absc. $x = l(x \pm \sqrt{(xx-1)})$ setzen. Es ist nämlich vermöge der bekannten Eigenschaften der Hyperbel $\frac{x+\sqrt{(xx-1)}}{1} = \frac{1}{x-\sqrt{(xx-1)}}$, also $lx - \sqrt{(xx-1)} = -l(x+\sqrt{(xx-1)})$. Weil nun der Ausschnitt $ACN = -ACM$ ist, so wird $ACN = -l(x+\sqrt{(xx-1)}) = lx - \sqrt{(xx-1)}$. Wenn man also in dem allgemeinen Ausdruck 2 Sect. Absc $x = lx \pm \sqrt{(xx-1)}$ das untere Zeichen braucht, so muß allemahl der Ausschnitt verstanden werden, dessen Bogen sich von A bis N erstreckt. Aber solcher Ausschnitte giebt es wiederum unzählige, also findet man für den Logarithmen eines jeden ächten Bruchs folgende: $2ACN$; $2ACN \pm 2$ Sect. AEBFA; $2ACN \pm 4$ Sect. AEBFA; u. s. w. oder $2ACN$; $2ACN \mp 2\pi\sqrt{-1}$; $2ACN \mp 4\pi\sqrt{-1}$ u. s. w. also überhaupt $l(x-\sqrt{(xx-1)}) = 2ACN \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1} = -2ACM \pm 2\pi\lambda\sqrt{-1}$. Die bisherige Verzeichnung giebt also die Logarithmen aller positiven Zahlen von der einen Gränze $+\infty$ bis zur andern Gränze 0.

74. §.

Wird $x < 1$ angenommen, so stellet $x \pm \sqrt{(xx-1)}$ eine unmögliche Zahl vor, welche man auch so ausdrücken kann: $x \pm \sqrt{(1-xx)}\sqrt{-1}$. Es sey $x = CQ$, so ist
46. Fig. $QG = \sqrt{(1-xx)}$ eine unmögliche Applicate der Hyperbel,

bel, aber eine mögliche Applicate des Kreises, und wenn man den Bogen AG $= \varphi$ setzt, so ist $x = \text{col.}\,\varphi$ und $\sqrt{(1 - xx)} = \text{sin.}\,\varphi$: also erhält man 2 Sect. Absc. $x = l(\text{col.}\,\varphi \pm \text{sin.}\,\varphi.\sqrt{-1})$. Die Grösse $\text{col}\,\varphi \pm \text{sin.}\,\varphi.\sqrt{-1}$ ist unmöglich, und sie hat unzählige Logarithmen, die ebenfalls insgesammt unmöglich sind. Jeder Ausschnitt nämlich, der zwischen CA, CG, und dem von A nach G sich erstreckenden Bogen fällt, doppelt genommen ist ihr natürlicher Logarithme. Diese Bogen sind aber

AG; AG + GBFAG; AG + 2 GBFAG, u. s. w.

oder auch AFBG; AFBG + GAFBG; AFBG + 2 GAFBG, u. s. f. fort,

also sind auch obiger Ausschnitte unzählige, welche die Formul $\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1} \pm \lambda\pi\sqrt{-1}$ überhaupt ausdrückt: daher erhält man $l(\text{col.}\,\varphi + \text{sin.}\,\varphi.\sqrt{-1}) = \varphi\sqrt{-1} \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$. Hat $\text{sin.}\,\varphi\sqrt{-1}$ das Zeichen (—) vor sich, so ist auch φ negativ, und man muß die entgegen gesetzten Ausschnitte nehmen, deren Bogen sich von A nach H erstrecken, alsdenn erhält man $l(\text{col.}\,\varphi - \text{sin.}\,\varphi\sqrt{-1}) = -\varphi\sqrt{-1} \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$. Wird $x = 0$, so fällt G in E und H in F, und es wird $l \pm \sqrt{-1} = \pm(\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1} \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1})$. Weil man auch $\lambda = 0$ nehmen kann, so ist dieses die bernoullische Regel $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$, oder $\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{2}\pi$, und es erhellet, daß $l\sqrt{-1}$ hier kein andrer, als der natürliche Logarithme von $\sqrt{-1}$ seyn könne. Für negative x bleibt die Verzeichnung eben so, aber nur so lange, als $-x < -1$ ist. Es wird nunmehro $\varphi > 90°$, da dann noch $\text{sin.}\,\varphi$ entweder positiv oder negativ seyn kann, obgleich $\text{col.}\,\varphi$ nun negativ ist. Um nun hieraus abzunehmen, wie der Logarithme einer jeden unmöglichen Zahl sich geometrisch verzeichnen lasse, darf man nur bemerken, daß sie allemahl unter der Form $a + b\sqrt{-1}$,

begriffen seyn werde. Demnach nehme man φ so, daß tang. $\varphi = b : a$ wird; so hat man sin. $\varphi = \frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$, $\cos. \varphi = \frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}$ und $a + b\sqrt{-1} = (\cos. \varphi + \sin. \varphi . \sqrt{-1})\sqrt{(aa+bb)}$, wie es dem 34. §. gemäß ist. Nun nehme man $ACM = l\sqrt{(aa+bb)}$, und $CQ = \frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}$, da denn $QG = \frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$ wird, (man müßte QH nehmen, wenn b negativ wäre) so sind alle Ausschnitte, deren Bogen sich von M nach G, oder auch von M nach H erstrecken, diejenigen welche man sucht. Die hieher gehörigen Bogen sind MAG; MAG + GBFAG; MAG + 2 GBFAG, und s. f. ingleichen MAFBG; MAFBG + GAFBG; MAFBG + 2 GAFBG, und s. w. welches alles mit den Rechnungen aus den allgemeinen algebraischen Formuln (34. §.) völlig übereinstimmet.

75. §.

Es werde nun $x = -1 = CB$, so ist $x + \sqrt{(xx-1)} = -1$, $\varphi = 180°$, und die Bogen, welche zwischen A und B fallen, sind keine andere, als AEB; AEB + BFAEB; AEB + 2 BFAEB, u. s. f. oder auch AFB; AFB + BEAFB; AFB + 2 BEAFB, u. s. f. daraus folgt, daß die Ausschnitte, denen diese Bogen zugehören, doppelt genommen, die natürlichen Logarithmen von -1 sind. Unter diesen ist gewiß keiner $= 0$, sondern sie sind alle in der Formul begriffen $l - 1 = \pm(2\lambda + 1)\pi\sqrt{-1}$. Wird $-x > -1$ so wird $-x \pm \sqrt{(xx-1)}$ eine negative Zahl, und auch bey dieser Voraussetzung stimmt die Verzeichnung mit der Rechnung völlig überein. Es sey $x = -Cp$, und $+\sqrt{(xx-1)} = pn$, so ist $l(-x + \sqrt{(xx-1)})$

(xx — 1) der doppelte Ausschnitt zwischen CA, Cn, und dem Bogen, welcher sich von A bis n erstreckt: dahin gehören nun die Bogen AEBn; AEBFAEBn, u. s. f. ingleichen AFBn, AFBEAFBn, u. s. f. demnach wird $l(-x+\sqrt{(xx-1)}) = \pm(2\lambda+1)\pi\sqrt{-1}+2BCn$. Aber es ist $BCn = ACN = \frac{1}{2}l(+x-\sqrt{(xx-1)})$ wenn hier der mögliche Logarithme allein verstanden wird: also hat man $l(-x+\sqrt{(xx-1)}) = l(+x-\sqrt{(xx-1)}) \pm (2\lambda+1)\pi\sqrt{-1}$. Für eben die Abscisse $x = -Cp$ sey $pm = -\sqrt{(xx-1)}$, so ist $l(-x-\sqrt{(xx-1)})$ der doppelte Ausschnitt zwischen CA, Cm, und dem Bogen, der sich von A bis m erstreckt. Aber solcher Bogen giebt es wiederum folgende: AEBm; AEBFAEBm, u s. f. ingleichen AFBm; AFBEAFBm, u. s. f. diesemnach wird $l(-x-\sqrt{(xx-1)}) = \pm(2\lambda+1)\pi\sqrt{-1}+2BCm$. Da nun wiederum $BCm = ACM = \frac{1}{2}l(x+\sqrt{(xx-1)})$, so erhält man $l(-x-\sqrt{(xx-1)}) = l(+x+\sqrt{(xx-1)}) \pm (2\lambda+1)\pi\sqrt{-1}$. Die geometrische Verzeichnung einer algebraischen Formul kann nie auf Schlußfolgen leiten, die von den Resultaten der Rechnung selbst verschieden sind, wofern nur die Verzeichnung der Formul genau angemessen ist, und sie völlig erschöpfet: aber dasjenige erschöpfet die Formul $x+\sqrt{(xx-1)}$ bey weitem nicht, was Hr. d'Alembert auf der 215 und 216 S. der Opuscules davon saget. Wenn ferner von ihm behauptet wird, daß die hyperbolischen Ausschnitte, wenn $-x > -1$ genommen werde, wieder möglich werden, so kann dieses nur zugestanden werden, wenn man sie von B anfangen lässet, also für $x = -1$ wieder $= 0$ setzt: aber alsdenn sind sie die Logarithmen von $\frac{-x \pm \sqrt{xx-1}}{-1}$ $= +x \mp \sqrt{(xx-1)}$, und keinesweges die Logarithmen von $-x \pm \sqrt{(xx-1)}$.

76. §.

Man kann die Gleichung Sect. Absc. $x = lx \pm \sqrt{(xx-1)}$ überhaupt so ausdrücken $\Phi\sqrt{-1} = l(\text{col.}\Phi \pm \text{sin.}\Phi.\sqrt{-1})$, dann wird col.$\Phi$ unmöglich als Abscisse des Kreises, aber eine mögliche Abscisse der Hyperbel, wenn col.$\Phi > \pm 1$ genommen wird. Zugleich wird sin.Φ sowohl, als auch der Ausschnitt Φ selbst unmöglich, aber sin.$\Phi\sqrt{-1}$ wird eine mögliche Applicate und $\Phi\sqrt{-1}$ ein möglicher Ausschnitt der Hyperbel. Diese Gleichung braucht Herr de Foncenex, allein Hr. d'Alembert ist damit auf der 217. u. f. Seite gar nicht zufrieden: inzwischen fallen nunmehro die Zweifel, welche er dagegen macht, alle von selbst weg. Sie sind durch die vorhergehende Verzeichnung alle beantwortet, diese zeiget, daß man sowohl eine Idée nette, als auch exacte (wie Herr d'Alembert sich ausdrückt), von einem unmöglichen Kreisbogen haben könne. Es hat seine unstreitige Richtigkeit, daß $\Phi\sqrt{-1}$ den hyperbolischen Ausschnitt allemahl bezeichne, und so wie es gewiß ist, daß $\Phi\sqrt{-1}$ unzählige Werthe habe, wenn $x = \pm 1$ ist; so ist es auch gewiß, daß der hyperbolische Ausschnitt in eben den Fällen unzählige Werthe habe, höchst unrichtig aber ist es, daß der hyperbolische Ausschnitt $= o$ sey, wenn $x = -1$ ist. Es ist ferner unrichtig, daß $\Phi\sqrt{-1}$ wieder möglich werde, wenn man $-x > -1$ nimmt; denn die Bogen ohne Winkel Φ werden von A angerechnet, und für $x = -Cp$, bestehet Φ aus einem möglichen Stück $\pm AEB$, oder überhaupt $\pm(2\lambda+1)\pi$, und einem unmöglichen Winkel BCn, oder BCm; daher besteht auch $\Phi\sqrt{-1}$ aus einem unmöglichen und einem möglichen Stück, deren Summe gewiß unmöglich ist. Für $+x > +1$ hat $\Phi\sqrt{-1}$ deswegen einen möglichen Werth, weil der Winkel ACM unmöglich, und dieses einer von denen ist, welche Φ in dieser Voraussetzung bedeutet.

77. §.

77. §.

Die hyperbolischen Trapezien lassen sich bey dieser Verzeichnung so bequem nicht wie die Ausschnitte gebrauchen, und bey Verzeichnung der Logarithmen unmöglicher Grössen dienen sie gar nicht. Das rühret daher, weil in dem unmöglichen Stück der Hyperbel, dem Kreise nämlich, die Gleichheit der Ausschnitte, und der ihnen respondirenden Trapezien wegfällt; denn in dem Kreise ist das sogenannte parallelogrammum inscriptum nicht mehr von beständiger Grösse. Wenn man inzwischen die Trapezien gebrauchen will, so weit es angehet, so bestätigen sie alles dasjenige, was vermittelst der Ausschnitte gefunden wird. Es sey, wie sonst gewöhnlich ist, $AD = CD = 1$ gesetzt, so ist $AC = \sqrt{2}$, und $ADKM = l\frac{CK}{CD} = lCK$. Wenn $CK = t$, und $km = u$ gesetzt ist; so schließt man jene Gleichung daraus, weil $d.ADKM = \frac{dt}{t}$ ist. Aber eben dieses Differential gehöret zu allen Trapezien, die zwischen DK, AD, MK, und dem Bogen fallen, der sich von A nach M erstreckt: also gehört hieher auch das Trapezium

$$ADg + gEBL + LHAD + ADKM,$$

und überhaupt

$$\lambda.(ADg + gEBL + LHAD) + ADKM.$$

Ferner gehört dahin

$$ADHL + LBEg + gDA + ADKM,$$

und überhaupt

$$\lambda.(ADHL + LBEg + gDA) + ADKM.$$

Weil aber nun die Peripherie des Kreises, welcher das unmögliche Stück der Hyperbel ausmacht, $= 2\pi\sqrt{2}\sqrt{-1}$, also die Fläche desselben $ADg + gEBL + LHAD = 2\pi\sqrt{2}\sqrt{-1} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\pi\sqrt{-1}$ ist, so wird ei-

gentlich das Trapez. Absc. $t = ADKM \pm 2\lambda\pi . \sqrt{-1}$. Nimmt man $-Ck$ statt CK, so ist das Trapez. Absc. $-t$ keinesweges $= Bdkm$, wenn die Voraussetzung bleibt, daß das Integral $\int \frac{dt}{t} = 0$ seyn soll, wenn $t = +1$ ist. Soll das Trapez Absc. $-t = Bdkm$ seyn können, so muß das Integral $\int \frac{dt}{t} = 0$ seyn, wenn $t = -1$ ist: dann aber wird Trapez. Absc. $-t = l-t-l-1 = l\frac{-t}{-1} = l+t$. Aber in der Voraussetzung, daß das Integral nur $= 0$ sey, wann $t = +1$ ist, welche nicht geändert werden darf, hat das Trapez. Absc. $-t$ folgende Werthe

$ADg + gEBd + Bdkm$,

$ADg + gEBd + BdL + LHAg + gEBd + Bdkm$,

u. s. f.

ingleichen

$DAHL + LdB + Bdkm$

$DAHL + LdB + dBEg + gAHL + LdB + BDkm$,

u. s. f. welche überhaupt unter dieser allgemeinen Formul enthalten sind: $(2\lambda + 1)\pi\sqrt{-1} + Bdkm = (2\lambda + 1)\pi\sqrt{-1} + l + t$. Das alles ist mit den obigen Resultaten, welche theils aus den algebraischen Formuln allein, theils aus Betrachtung der hyperbolischen Ausschnitte sind gefolgert worden, vollkommen übereinstimmend.

V. Vom

V.

Vom

Berührungswinkel

und

Krümmungskreise.

1. §.

Weil ich in meinem Lehrbegriffe der gesammten Mathematik I. Theil, 130—133. §. Geometrie, 288—292. S. alle vermeinte Schwierigkeiten bey der Theorie vom Berührungswinkel ganz einleuchtend gehoben zu haben glaube, so würde ich keine Abhandlung darüber von neuen aufgesetzt haben, wenn nicht noch immer neuere Schriftsteller dieser Sache, die längst vergessen seyn sollte, wieder erwehnten, und von den falschen Begriffen, welche man sich davon vormahls gemacht hat, eben so falsche Anwendungen machten. Mein Vortrag im Lehrbegriffe a. a. O. enthält in einem kurzen Auszuge auf zweyen Blädtern das wesentliche von dem, was Wallisius in seiner bekannten Abhandlung: De angulo contactus et semicirculi disquisitio geometrica, davon geurtheilet hat. Man findet diese Abhandlung im II. Theil der Operum Wallisii, wovon zwey Ausgaben vorhanden sind, die ältere in 4, von 1656 und 1657, die neuere in fol. in drey Theilen, wovon der letzte im Jahr 1699 herauskam. Die daraus angeführte Abhandlung wird jedem Leser angenehm seyn, der Vergnügen daran findet, die vornehmsten ältern Schriftsteller kennen zu lernen, welche bald so, bald anders von der Sache gedacht haben. Ich werde hier die Ordnung des Vortrages in der Hauptsache wie im Lehrbegriffe beybehalten, zugleich aber noch einiges zur weitern Erläuterung beyfügen, und am gehörigen Orte zeigen, daß mein Vortrag mit Wallisii Vortrage im wesentlichen übereinstimme.

2. §.

Geometrische Lehnsätze.

1) Wenn zweene Kreise einander in D berühren, so haben sie in D eine gemeinschaftliche Tangente. Denn 49. Fig.

eine grade Linie durch ihre Mittelpuncte C und E geht durch den Berührungspunct: (lehrb. I. Th. 56. §. Geom.) also ist AB durch D auf CE senkrecht gesetzt eine Tangente beyder Kreise. (a. a. O. 127. §.)

2) Umgekehrt: Kreise, die in D eine gemeinschaftliche Tangente haben, berühren einander. Denn eine grade Linie durch D auf AB senkrecht gesetzt geht durch beyder Mittelpunct, (a. a O. 127. §. Geom.) also berühren die Kreise einander. (48. 49. §. Geom.)

3. §.

Wenn zwo Kreislinien durch D gehen, und wenn alsdenn die grade Linie AB, welche den einen Kreis in D berührt, von der graden Linie ab, welche den andern Kreis ebenfalls in D berührt, geschnitten wird, so schneiden die Kreise einander ebenfalls.

Beweis. Eine grade Linie DH, welche in D auf AB senkrecht steht, ist nun von der graden Linie De verschieden, welche in eben dem Punct D auf ab senkrecht steht. Weil nun der Mittelpunct des einen Kreises in DH, der Mittelpunct des andern aber in De liegt; so liegen beyde Mittelpuncte nicht mit D in grader Linie, mithin schneiden die Kreise einander. (50. §. Geom.)

1. Zusatz.

Wenn die Kreise DGE, DFH, einander von innen berühren, der Halbmesser CD des ersten aber kleiner ist, als der Halbmesser CD des zweyten; so liegt DGE ganz innerhalb der Fläche des grössern Kreises DFH. (49. §. Geom.) Aber die gradlinichte Tangente AB liegt ganz ausserhalb der Fläche eben desselben Kreises DFH: demnach liegt der Bogen DF des grössern Kreises DFH zwischen dem Bogen DG des kleinern Kreises und der gradlinichten Tangente AB.

2. Zusatz.

Man ziehe durch D eine grade Linie ab so, daß sie gegen DH unter einem spitzen Winkel EDa geneigt ist; so schneidet ab alle Kreise, die einander in D berühren. Denn man kann vom Mittelpunct eines jeden dieser Kreise eine grade Linie wie EL auf ab senkrecht ziehen, welche alsdenn ab in einem Punct L an der Seite von D treffen muß, wo der spitze Winkel EDa befindlich ist. Weil nun allemahl $EL < ED$ ist; so liegt L innerhalb des Kreises DFH. Die grade Linie ab gehet also gewiß durch einen Punct innerhalb der Fläche eines jeden von allen den Kreisen, die einander in D berühren, und daraus folgt, daß ab alle diese Kreise schneide. (33. §. Geom.)

3. Zusatz.

Wenn EDa ein spitzer Winkel ist, so ist sein Nebenwinkel DEb stumpf, also $EDb > EDB$, weil EDB ein rechter Winkel ist; folglich muß die gradlinichte Tangente zwischen Db und der Peripherie eines jeden von den Kreisen liegen, die einander in D berühren.

4. §.

Euklids 16. Satz im III. Buch enthält die nachstehenden drey besondern Sätze.

1) Eine grade Linie AB im Endpunct D des Durchmessers DH auf demselben senkrecht gesetzt fällt ausserhalb der Fläche des Kreises, oder sie ist eine Tangente desselben.

Der Beweis davon ist leicht, man sehe im Lehrbegriff den 126. §. Geom.

2) Zwischen dem Kreisbogen DF und seiner Tangente DA fällt keine andre grade Linie. Das will sagen: man kann durch D keine grade Linie Da so ziehen, daß sie ganz zwischen dem Bogen DF und seiner Tangente DA fiele.

Der

Der Beweis folgt aus dem vorstehenden 3. §. 2 und 3. Zusatz.

3) Der Winkel des Halbkreises FDH ist grösser, sein Rest, oder Complement, FDA aber kleiner als jeder gradlinichte spitze Winkel.

Beweis nach dem Euklides.

Wäre der Winkel des Halbkreises, welchen der Durchmesser DH und der Bogen DF einschließt, nicht grösser, und sein Rest, welchen der Bogen DF mit der Tangente DA einschließt, nicht kleiner, als irgend ein gradlinichter spitzer Winkel, welchen der Durchmesser DH und eine grade Linie Da einschlösse; so müste diese grade Linie zwischen dem Bogen DF und der Tangente DA fallen, welches nach n. 2. unmöglich ist.

5. §.

Man kann dem dritten Satze noch beyfügen: der Winkel des Halbkreises HDf=HDF sey kleiner, als jeder stumpfe Winkel HDB, welches eben so aus dem 3. Zusatz des 3. §. folgt. Weil nun ein Winkel, der grösser als jeder spitze und kleiner als jeder stumpfe Winkel ist, kein andrer als ein rechter Winkel seyn kann; so folgt daraus,

1) daß der Winkel des Halbkreises ein rechter Winkel sey.

Der Winkel ADF, welchen Euklides des Winkels EDF Rest oder Complement nennt, kann kurz der Berührungswinkel heissen. Weil nun dieser kleiner ist, als jeder gradlinichte Winkel, (4. §. n. 3.) so kann er selbst keine Grösse mehr haben, und daraus folgt,

2) der Berührungswinkel ist ein verschwindender Winkel, man muß ihn =o setzen.

6. §.

Obgleich beyde Sätze des 5. §. wenn sie anders recht verstanden werden, vollkommen richtig sind, so haben doch die Ausleger des Euklides, und andre Schriftsteller allerhand scheinbare Schwierigkeiten dabey zu finden geglaubt. Die Sätze gelten nemlich von allen Kreisen, die ihre Mittelpuncte in DE haben und einander in D berühren, weil alsdenn die gradlinichte Tangente AB sie ebenfalls alle zugleich in D berührt. (2. §.) Es sey also auch DGM ein solcher Kreis, dessen Mittelpunct C in DE liegt: so ist HDF sowohl, als auch HDG ein rechter Winkel. Aber HDF und HDG sind ungleich groß, also können sie nicht alle beyde rechte Winkel seyn, oder es widerspricht Euklids 10 Grundsatz im I. Buch.

Ferner sind auch ADG und ADE ungleich groß. Wenn nun $ADG = o$ und $ADF = o$ wäre, so würde folgen, daß ein Nichts nicht eben so groß sey, als ein andres Nichts, welches ebenfalls eine ungereimte Behauptung wäre.

7. §.

Um diesen Schwierigkeiten auszuweichen, behauptete Clavius, einer der bekanntesten und besten Ausleger Euklids, der Berührungswinkel sey nicht $= o$, er sey so gar selbst ins Unendliche theilbar, zwar nicht vermittelst grader Theilungslinien, sondern vermittelst theilender Kreisbogen: dabey bleibe er doch an sich kleiner als jeder gradlinichte Winkel. Ferner der Winkel des Halbkreises, wenn er gleich grösser als jeder spitze Winkel sey, bleibe doch kleiner als ein rechter Winkel. Vorher hatte ein französischer sonst eben nicht sehr bekannt gewordener Mathematiker, Nahmens Le Pelletier aus Mans im Gouvernement Orleans die beyden im 5. §. aufgeführten Sätze als Folgerungen aus Euklids Vortrage behauptet, und sich darüber sehr richtig erklärt, wie ich im folgenden noch wei-

ter bemerken werde. Er zeigt vollkommen bündig, daß sonst der 16. Satz in Euklids III. Buche mit dem 1. Satz im X. Buche nicht bestehen könne.

8. §.

Der Berührungswinkel sey α, und β ein gradlinichter Winkel so groß man will. Weil nun $\beta > \alpha$ ist; so kann man von β die Hälfte, oder mehr als die Hälfte wegnehmen, vom Rest wieder die Hälfte, oder mehr als die Hälfte, und immer so weiter. Zuletzt muß man nach Euklids 1. Satz im X. Buch auf einem Winkel γ kommen, der kleiner als α ist: mithin ist α noch nicht kleiner als jeder gradlinichte Winkel. Clavius weiß diesen vollkommen richtigen Schlüssen nichts anders, als die Behauptung entgegen zu setzen:

> Euklids 1. Satz im X. Buche gelte nur von gleichartigen nicht aber von ungleichartigen Grössen; der Berührungswinkel aber sey mit einen gradlinichten Winkel nicht gleichartig, also könne man beyde nicht vergleichen, mithin auch Euklids 1. Satz aus dem X. Buche nicht anwenden.

Zu bewundern ist es, daß Clavius Berührungswinkel und gradlinichte Winkel als heterogene Grössen will angesehen wissen, die man nicht vergleichen kann, da doch Euklids 16. Satz im III. Buch, dessen Richtigkeit er voraussetzet, offenbar den Berührungswinkel mit gradlinichten Winkeln in Vergleichung bringt. Wie kann man sagen, der Berührungswinkel α sey kleiner als jeder gradlinichte Winkel β, wenn α und β heterogen sind? Vergleicht man denn nicht Grössen, wenn man ihre Gleichheit oder Ungleichheit angiebt?

9. §.

Le Pelletier, und mit ihm Wallis behaupten dagegen nur, daß Winkel mit krummlinichten Schenkeln, oder

mit

mit einem gradlinichten und einem krummlinichten Schenkel, sich unter einander selbst und mit gradlinichten Winkeln nicht völlig nach eben denselben sonst bekannten geometrischen Grundlehren vergleichen lassen, nach welchen man gradlinichte Winkel ganz richtig zu vergleichen gewohnt ist. Jeder Theil eines gradlinichten Schenkels läuft mit dem ganzen Schenkel nach einerley Richtung fort: eine ganz andre Bewandniß hat es mit den krummlinichten Schenkeln. Der Grundsatz der Congruenz so ausgedrückt:

> Grössen die man zwischen einerley Gränzen bringen kann, so daß sie auf oder in einander passen, sind gleich groß,

ist allgemein. Demnach ist es auch allgemein richtig:

> Winkel die man so auf einander legen kann, daß Spitze auf Spitze liegt, und die Schenkel paarweise an einander schlieſſen, man mag diese so weit man will verlängern, sind gleich groß.

Für gradlinichte Winkel ist der letzte Satz auch umgekehrt wahr:

> denn gradlinichte Winkel, die man nicht wie eben gesagt ist, zwischen einerley Gränzen bringen kann, oder kürzer ausgedrückt, gradlinichte Winkel, die nicht congruiren können, sind ungleich groß.

Aber weit gefehlt, daß dieser letzte Satz auch wahr seyn sollte, wenn von Winkeln mit krummlinichten Schenkeln, oder mit einem gradlinichten und einem krummlinichten Schenkel die Rede ist. Wenn gleich solche Winkel nicht congruiren können, so können sie doch gleich groß seyn: und grade das ist der Fall beym Winkel des Halbkreises und beym Berührungswinkel.

10. §.

Hievon ist die Anwendung sehr leicht gemacht. 50. Fig.
Wenn der gradlinichte Winkel EDF einem andern grad-

linich-

linichten Winkel gleich ist, wenn alsdenn die Spitze D auf A gelegt ist, und nun DF zugleich auf lAC liegt; so muß DE mit AB zusammen fallen. Aber auch DF und AC, und eben so DE und AB weichen nicht wieder von einander ab, man mag diese vier graden linien soweit man will verlängern, und der Grund davon ist dieser, weil die Richtungen DF, AC, so wie DE, AB, nun einerley sind, und kein Theil einer dieser graden linien von der Richtung der ganzen wieder abweicht. Wenn überdem durch A eine dritte von AB und AC verschiedene grade linie AL geführt ist; (es verstehet sich hier allemahl in einerley Ebene) so fällt sie entweder ganz innerhalb, oder ganz ausserhalb des Raums zwischen den Schenkeln AB und AC, wie im letzten Fall Al. Nun leidet es keinen Zweifel, daß LAC $<$BAC, aber lAC $>$ BAC sey.

11. §.

Wenn dagegen G ein von A verschiedener Punct in AB ist, und durch G die grade linie GH gezogen wird, die mit GB selbst den Winkel BGH macht; wenn ferner gefragt würde, wie groß der Winkel HAC sey, welchen die gebrochene linie HGA mit AC einschließt? so würde man doch wohl nicht anders, als auf folgende Art antworten können.

Nicht die ganze gebrochene linie HGA macht mit AC einerley Winkel, sondern der eine Theil AG den Winkel GAC, der andre GH aber, welcher verlängert AC in g schneidet, macht mit AC auf eben der Seite einen grössern Winkel HgC. Frägt man ferner, was für einen Winkel die gebrochene linie AGH mit AB einschliesse? so wird die Antwort seyn müssen: nicht die ganze gebrochene linie AGH mache mit AB einerley Winkel, der Theil AG schliesse mit AB gar keinen Winkel ein, der Theil GH aber den Winkel HGB.

12. §.

12. §.

Man ziehe noch GK so, daß BGK > BGH wird: alsdenn hat es mit der Frage was die gebrochene linie KGA mit AC für einen Winkel mache? eben die Bewandniß, wie mit der vorigen. Die erste Abweichung der gebrochenen linie AGH von der Richtung AC ist mit der ersten Abweichung der gebrochenen linie AGK von derselben Richtung AC einerley, es ist der Winkel GAC, und in diesem Sinne kann man sagen AGH, AGK, machen mit AC einerley Winkel. Nun wäre es wohl eine sehr ungeometrische Einwendung, wenn jemand entgegen setzte;

> AGK weiche weiter von AC ab, als AGH, also sey der Winkel CAK > CAH, der Schenkel AGK falle über AGH hinaus, so wie AG über AL hinaus fällt.

Allerdings machen GK und GH mit AC verschiedene Winkel, aber das sind die Winkel CAH, CAK nicht, wenn von den Winkeln die Rede ist, um welche AGH, AGK, bey A von der Richtung AC abzuweichen anfangen: diese ersten Abweichungswinkel sind beyde mit GAC einerley.

13. §.

Wenn die Frage wäre: wie weit die gebrochene linie AGH bey A von der graden linie AB abweiche, so ist nun wohl evident genug, daß man antworten müsse:

> bey A giebt es noch keinen Abweichungswinkel der gebrochenen linie AGH von AB.

Demnach giebt es auch bey A noch keinen Abweichungswinkel der gebrochenen linie AGK von AB, und in diesem Sinne sind die Winkel BAH, BAK, beyde = 0. Wäre es nun nicht wiederum eine sehr ungeometrische Einwendung, wenn jemand entgegen setzte:

> der Schenkel AGK weiche von AB weiter ab, als der Schenkel AGH, also müsse der Winkel BAK > BAH,

mithin vermöge der vorigen Behauptung ein Nichts gröſſer als das andre Nichts seyn?

Nichts ist indessen gewisser, als daß man in der Lehre vom Berührungswinkel völlig ähnliche ganz ungeometrische Schlüsse gemacht, und diese Lehre dadurch in eine solche Verwirrung gebracht hat, welche manchen sonst guten Schriftsteller verleitet, die sonderbarsten Behauptungen vorzutragen.

14. §.

49. Fig. Eine gebrochene Linie wie AGH, AGK, kann aus weit mehr denn zweyen gradlinichten Theilen zusammen gesetzt seyn, und gewöhnlich wird alsdenn jeder Theil um einen eigenen Winkel von der Richtung AC abweichen, obgleich auch einige Theile unter denselben befindlich seyn können, welche von AC um einerley Winkel abweichen. Alle gradlinichte Theile einer solchen gebrochenen Linie haben ihre bestimmte Gröſſe, die Aenderung des Abweichungswinkels von einer gegebenen ersten Richtung erfolgt da, wo die Winkelpuncte hinfallen, und es lassen sich mehrere nach einem solchen Winkelpunct folgende Puncte angeben, woselbst die Abweichung der gebrochenen Linie von der ersten gegebenen Richtung noch eben so groß ist, als sie bey dem nächstvorhergehenden Winkelpunct war. In M weicht die gebrochene Linie AGH noch um einen eben so grossen Winkel als in A von AC ab, und in N um einen eben so grossen Winkel als in G.

15. §.

53. Fig. Wenn dagegen AGH eine krumme Linie, und in derselben G ein Punct ist, der nach N folgt, so nahe bey N als man will, so ist die Abweichung der krummen Linie bey G von der gegebenen Richtung AC nicht einerley mit der Abweichung derselben krummen Linie an der Stelle N von derselben Richtung AC. Das drückt man so aus:

die

die Richtung nach welcher die krumme linie fortläuft, ändre sich nach dem Gesetz der Stetigkeit. Die Richtung, nach welcher eine grade linie fortläuft, ändert sich an keiner Stelle, sie bleibt durchaus unverändert: die Richtung aber, nach welcher eine gebrochene linie fortläuft, ändert sich in den Winkelpuncten. Von der Richtung, nach welcher eine krumme linie AGH in einem gegebenen Punct A fortläuft, hat man einen ganz bestimmten Begriff, wenn man eine grade linie AB ziehen kann, deren Richtung von A nach B mit derjenigen einerley ist, nach welcher die krumme linie AGH in eben demselben Punct fortläuft. Eine solche grade linie wie AB kann den Bogen AG der krummen linie bey A wenigstens nicht schneiden, weil sich derselbe bey A sogleich von der Richtung AB ablenkt. Ein Punct N in AG so nahe bey A als man will liegt nicht mehr in AB: also ist AB eine gradlinichte Tangente des Bogens AG.

16. §.

Die erste Richtung AB des Bogens AG kann entweder unmittelbar, oder durch ihren Abweichungswinkel CAB von einer andern bekannten Richtung AC gegeben seyn. Wenn alsdenn GD denselben Bogen in G berührt; so ist GD mit der Richtung des Bogens in G einerley. Wenn ferner GD und AB einander in E, GD und AC einander in F schneiden; so ist BEG die Abweichung der letzten Richtung des Bogens AG von seiner ersten Richtung, und CFG die letzte Abweichung dieses Bogens von der bekannten Richtung AC oder FC. Durch A könnte wohl eine andre von ANG verschiedene krumme linie AMK so geführt seyn, daß die erste Richtung des Bogens AK bey A mit AB ebenfalls einerley wäre, wenn gleich übrigens die Bogen ANG, AMK weiter gar keinen Punct mit einander gemein hätten: wogegen eine grade linie, die durch A mit AB nach einerley Richtung liefe, auch mit

AB völlig zusammen fallen müste. Wenn nun von der Grösse der Winkel CAG, CAK die Frage ist; so erhellet, daß die Rede nur von demjenigen Winkel seyn könne, um welchen ANG, AMK, bey A von der Richtung AC abweichen. Weil nun die erste Richtung beyder Bogen bey A mit AB einerley ist; so folgt daraus, daß CAG = CAK = CAB sey, und es wäre sehr ungeometrisch, wenn man einwenden wollte, es müsse CAK > CAG seyn, weil AK von AC weiter als AG abweiche, oder AK über AG hinaus falle. Ist von der Grösse der Winkel BAG, BAK, die Frage; so erhellet eben so, daß die Rede nur von demjenigen Winkel seyn könne, um welchen AG oder AK bey A von der Richtung AB abweiche. Weil nun AG sowohl als auch AK bey A von der Richtung AB gar nicht abweicht; so ist BAG = o = BAK. Hier ist aber kein Nichts grösser als das andre Nichts: denn der Schluß, es sey BAK > BAG, weil der Bogen ANG innerhalb des Raums zwischen AB und AK liege, ist fehlerhaft; es hätte damit nur seine Richtigkeit, wenn ANG, AMK, nicht krumme sondern grade Linien wären.

17. §.

49. Fig. Hievon wird man die Anwendung sehr leicht auf die Berührungswinkel beym Kreise machen. Alle Kreise, die einander in D berühren, weichen in dem Berührungspunct D von der Richtung DH des gemeinschaftlichen Durchmessers DH um einen eben so grossen Winkel ab, als derjenige ist, um welchen die Tangente DA daran abweicht, und ihre Richtung in D ist mit der Richtung DA der Tangente einerley. Jener Winkel HDA ist ein rechter Winkel, also kann man sagen jeder Winkel wie HDF, MDG, sey ein rechter Winkel, ohne daß solches mit Euklids 10. Grundsatze im I. Buche einen Widerspruch machte. Eben so richtig kann man behaupten, jeder Winkel wie ADF, ADG, sey = o, ohne daß hieraus folgte, ein Nichts

sey

sey grösser als das andre Nichts; denn es ist falsch geschlossen, wenn man die Folge ziehet: es sey ADG > ADF, weil DF zwischen DA und DG durchgehe. (16. §.) Ein Punct F, der den Kreis F'HfD beschreibt, ändert beständig seine Richtung, in jeder folgenden Stelle seines Weges rückt er schon nach einer andern Richtung fort, als in der vorigen Stelle, diese beyden Stellen mögen einander so nahe liegen, als man will. Bey dem allen kann man doch in jedem Punct seines Weges die Richtung angeben, die er jetzt nimmt, das ist diejenige, nach welcher er fortrücken würde, wenn seine Richtung nun unverändert bliebe. Wäre der Punct F durch H und f in D angekommen, und rückte nun weiter fort, ohne seine Richtung zu ändern, so würde er nach DA fortgehen. In eben derselben Richtung DA würde auch der Punct G fortrücken, wenn er durch M und g in D angelangt wäre, und nun die Richtung behielte, womit er in D anlangte.

18. §.

Ich kann nicht umhin einige hieher gehörige Stellen aus Wallisii Abhandlung de Angulo contactus et semicirculi hier anzuführen, um die Uebereinstimmung seines Vortrages mit dem meinigen zu zeigen. Meine Absicht ist nicht, dem bisherigen Vortrage dadurch mehr Gewicht zu geben, denn es kommt dabey nichts auf das Ansehen dieses oder jenen Schriftstellers, sondern alles auf die beygebrachten Gründe an. Nur mögte ich wohl meine Verwunderung darüber zu erkennen geben, daß ich bey vielen Schriftstellern nach dem Wallisius des letztern Abhandlung angeführt, und doch von Clavii unrichtigen Vorstellungsarten Gebrauch gemacht finde. Auch das sind Folgen davon, daß man die Lieblingsidee vom Unendlichkleinen in die reine Elementargeometrie gebracht hat. (M. s. unter andern oben die 111. S.)

Beym Wallisius a. a. O. Cap. III. findet sich unter andern folgende Stelle.

„Non ex linearum concurrentium inclinatione qualibet judicatur angulus, si nempe ita se habeant lineae concurrentes, vt hic magis illic minus inclinentur, (und das ist der Fall, wenn nicht alle beyde Schenkel des Winkels grade linien sind, sondern wenigstens der eine eine krumme Linie ist, wie beym Berührungswinkel) sed ex illa, quam fortiuntur in ipso concursus puncto.„

Ferner im Cap. IV. wo der Satz bewiesen wird: circumferentiae ad rectam tangentem in puncto contactus nulla est inclinatio.

„Si circumducta semidiameter CB circa centrum C extremo suo puncto B describat peripheriam BEAN; punctum B motu suo ante contactum in puncto A verget ad rectam tangentem AP, post contactum ab illa resilit: at in ipso contactus puncto indifferenter se habet ad vtrumque, nec appropinquat enim, nec elongatur, sed neque rectam transit, continuatur tamen vniformiter motus. At motus invariatus, qui ad assignatam in eodem plano rectam neque accedat, neque recedat, neque tamen transeat, quo pacto inclinatus dici possit non video. Neque enim versum inclinat, neque retrorsum, nec tamen transit: vel enim propter linearum coincidentiam vel saltem parallelismum fieri dicendum erit.

Qui autem secus sentiunt idem videntur affirmare, ac si dicerent, ambulantem in circulo horizontali a puncta meridionali N (vbi Orientem versus spectat) donec continuato intinere per punctum orientale A ad puncta E, D, perueniat, (vbi Occidentem versus spectat) nec tamen interim vnquam directe spectet Septentrionem. Nam si quando directe spectet Septentrionem, erit certe cum in puncto A existit; (prius enim aspectus ad Orientem declinat, postea vero ad Occi-

52. Fig.

Occidentem) si vero in puncto A directe spectet Septentrionem, (neque ad Orientem neque ad Occidentem declinans) erit certe in illo puncto A tendentia circuli (cujus ductum sequitur incedens) versus punctum P: (nam recta AP erit linea meridionalis, vt quae lineam Orientis et Occidentis AB transuersim secat ad angulos rectos) adeoque in illo puncto eodem erit tendentia tam circumferentiae quam rectae tangentis; nullus igitur angulus sed linearum coincidentia.„

19. §.

Die falschen Vorstellungen vom Berührungswinkel mögten sich in den Elementarbüchern der Geometrie wohl nicht so lange erhalten haben, wenn der Sprachgebrauch vom Unendlichkleinen den damit verwandten lehren vom Krümmungskreise und Krümmungswinkel in der höhern Geometrie nicht ebenfalls ein geheimnißvolles Ansehen gegeben hätte. Denn mit der lehre vom Berührungswinkel in der Elementargeometrie stehet die lehre vom Krümmungswinkel in der höhern Geometrie in genauer Verbindung. Wenn gleich ANG, AMK keine Kreisbogen, sondern krumme linien von ganz andrer Natur als der Kreis sind; so können sie doch in A eine gemeinschaftliche gradlinichte Tangente AB haben. (16. §.) Alsdenn machen diese Bogen bey A mit AB gar keinen Winkel, und es hat mit den Winkeln GAB, KAB, die dem Schein nach da sind, eben die Bewandniß, wie mit dem Berührungswinkel des Kreises mit seiner gradlinichten Tangente. 52. Fig.

20. §.

Wenn indessen der Bogen AMK ganz an der hohlen Seite des Bogens ANG liegt, und ihr seine erhabene Seite zuwendet, wie es die Figur vorstellet; so lenkt sich AMK gleich anfangs bey A stärker von der Tangente AB ab, als ANG, oder wie man es auch ausdrückt, AMK

fängt gleich bey A an, sich stärker zu krümmen als ANG. Wird durch G eine Tangente GF gezogen, welche die erste Tangente bey E unter dem Winkel BEG schneidet; so weiß man, daß EG oder GD die Richtung des Bogens AG an der Stelle G sey, und der Winkel BEG zeigt an, wie weit die Richtung des Bogens AG bey G schon von der ersten Richtung AB abweiche. Eine Tangente durch K, welche AB in O schneidet, zeigt eben so die Richtung des Bogens AMK in K an, und der Winkel BOK, wie weit dieser Bogen bey K schon von der ersten Richtung AB abweiche. Wenn die Bogen AG, AK, gleich sind, und alsdenn allemahl der Winkel BOK > BEG ausfällt, man mag AG, AK, so klein als man will nehmen; so krümmt sich der Bogen AK stärker als AG.

21. §.

54. Fig. Weil die Richtung einer krummen Linie AMm in jedem Punct M mit der Richtung der gradlinichten Tangente Mf übereinkommt; so ist eine grade Linie MF, welche in M auf der Tangente Mf senkrecht steht, an eben dieser Stelle zugleich auf der krummen Linie senkrecht: eben darum führt sie auch den Nahmen einer Normallinie für diese Stelle M. Sind alsdenn M, m, zwey verschiedene Puncte in einer und eben derselben krummen Linie; sind ferner MF und mG Normallinien für diese Stellen, welche einander in K schneiden; so nennt man den Winkel MKm die Amplitude des Bogens Mm.

48. Fig. Wenn ADEB ein Kreis ist, so schneiden alle Normallinien desselben, die man durch A, D, E, u. s. f. ziehen kann, einander im Mittelpunct C, und die Bogen AD, AE, verhalten sich wie ihre Amplituden ACD, ACE. Zu gleichen Bogen AD, DE, gehören gleiche Amplituden ACD, DCE, und wenn der Bogen AE doppelt so groß, als AD ist, so ist auch ACE = 2 ACD.

22. §.

22. §.

Die beyden gradlinichten Tangenten Mf, mt, wo- 54. Fig.
zu die Normallinien MF, mG gehören, schneiden einander ebenfalls in E, und alsdenn ist mEf die Abweichung der letzten Richtung des Bogens Mm beym Endpunct m von seiner ersten Richtung beym Anfangspunct M. (20. §.) Dieser Abweichungswinkel ist der Amplitude des Bogens gleich, weil allemahl MEm + MKm = 2R = MEm + mEf, also MKm = mEf seyn muß.

Demnach ist die Abweichung KGM der letzten Rich- 48. Fig.
tung eines Kreisbogens AE von seiner ersten Richtung seiner länge proportional, weil die Amplitude ACE = KGM sich wie die länge des Bogens verhält. (21. §.)

23. §.

Eben darum krümmt sich eine linie von M nach m, 54. Fig.
weil die Abweichung ihrer letzten Richtung in m allemahl eine Aenderung leidet, wenn die länge des Bogens Mm, es sey auch so wenig als man will, geändert wird. Wollte man Mm über m hinaus so verlängern, daß die Abweichung der letzten Richtung in jedem Endpunct von der ersten eben so groß bliebe, als sie im Punct m war; so würde der über m hinaus dazu kommende Theil keine krumme Linie bleiben, sondern eine grade Linie werden.

Wenn zum Kreisbogen AD immer eben so grosse 48. Fig.
Theile DE, EN, hinzu kommen, so wächst die Abweichung der letzten Richtung von der ersten ebenfalls um gleiche Differenzen, die alle gleich ACD sind, die Bogen AD, DE, EN, mögen so klein seyn, als man will, wenn sie nur gleich groß sind. Dieserwegen ändert sich die Abweichung der letzten Richtung von der ersten gleichförmig, wenn der Bogen selbst gleichförmig wächst.

Ein und eben derselbe Kreis hat an allen Stellen einerley Krümmung, so wie die grade Linie an allen Stellen einerley Richtung.

24. §.

51. Fig. Wenn zwey Kreise ADG, AFH, einander von innen berühren, also auch im Berührungspunct eine gemeinschaftliche gradlinichte Tangente AB haben; so verhalten sich die Amplituden dieser Bogen in umgekehrter Ordnung wie ihre Halbmesser. Wenn man $AEF = \alpha$, $ACD = \beta$ setzt, so ist $AF = \alpha . AE$, $AD = \beta . AC$. Weil ferner $AF = AD$ angenommen wird, so erhält man $\alpha . AE = \beta . AC$, also $\alpha : \beta = AC : AE$.

Zusatz.

Gleich grosser Kreisbogen, die einander im Anfangspunct berühren, letzte Abweichungen von der gemeinschaftlichen Tangente im Anfangspunct verhalten sich also ebenfalls in umgekehrter Ordnung wie ihre Halbmesser. (22. §.) Wenn in dem besondern Fall, welchen die 51. Figur vorstellet, des grössern Kreises ADG Halbmesser AC zugleich des kleinern Kreises Durchmesser ist, alsdenn aber CF gezogen, und bis an die grössere Peripherie in D verlängert wird: so ist $AEF = 2 . ACD$, und $AD = \beta . AC$, $AF = \alpha . AE$. Weil nun $AC : AE = 2 : 1 = \alpha : \beta$, so erhält man $AD = AF$. Wenn ferner die durch F und D gezogenen gradlinichten Tangenten die erste Tangente AB in K und L schneiden; so ist allemahl $BKF = 2 . BLD$, wie klein auch AD und AF genommen werden, wenn nur beyde allemahl gleich groß bleiben, wie hier aus der angenommenen Bedingung folgt, daß C, F, D, in grader Linie liegen sollen.

25. §.

Die Grösse des letzten Abweichungswinkels BKF hängt demnach beydes zugleich von der Länge des Kreisbo-

gens

gens AF ab und von der Grösse seines Halbmessers AE: allemahl ist $BKF = \frac{AF}{AE}$. (Lehrbegriff 2. Th. 472. §. Geom.)

$BLD = \frac{AD}{AC}$. Weil nun der Voraussetzung gemäß AF $= AD$ bleiben muß, wenn gleich die Halbmesser AE, AC, wie man will verschieden sind; so kommt es bey Vergleichung der letzten Abweichungswinkel gleicher Kreisbogen von ihrer ersten Richtung auf die Länge der Bogen selbst gar nicht an. Diesemnach kann man eins für allemahl $AF = AD = 1$ annehmen, so ist der Abweichungswinkel ganz allgemein $= \frac{1}{r}$, wenn der Halbmesser des Kreisbogens, von dem die Rede ist, $= r$ gesetzt wird.

26. §.

Es bezeichne also im allgemeinen α den letzten Abweichungswinkel eines Kreisbogens von seiner ersten Richtung, wenn dieser Bogen $= 1$, und sein Halbmesser $= r$ ist: so hat man $\alpha = \frac{1}{r}$, und man findet $\alpha = 1$, wenn auch $r = 1$ ist. Nun ist α der algebraische Maaßwinkel, dessen Grösse ein für allemahl bekannt ist. (Lehrbegriff 2. Th. 473. §. Geom.) und für jeden andern Kreis, dessen Halbmesser r ist, zeigt die Gleichung $\alpha = \frac{1}{r}$, wie groß der Winkel in Vergleichung mit dem algebraischen Maaßwinkel sey, um welchen die letzte Richtung eines solchen Bogens von diesem Kreise, der so groß ist, als das für Eins angenommene Längenmaaß, von seiner ersten Richtung abweicht. Wäre der Bogen $AF = AE = 1$, so wäre auch $AEF = BKF = 1$, und man würde BLD $= \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{2}$ finden. Wenn gleich nicht AF = AE = 1, aber doch AD = AF genommen wäre, vorausgesetzt, daß AE = 1 bleibe; so hätte man BKF = AF = AD, und BLD $= \frac{AD}{AC}$, mithin $\frac{BLD}{BKF} = \frac{1}{AC} = \frac{1}{r}$, (AC = r gesetzt) und $BLD = \frac{1}{r}$ BKF.

27. §.

In dieser Gleichung kann BKF als ein ganz unbestimmter Winkel betrachtet werden; sie vergleicht ganz allgemein die letzte Abweichung eines jeden Kreisbogens für den Halbmesser r mit der letzten Abweichung eines eben so langen zum Halbmesser = 1 gehörigen Kreisbogens von seiner ersten Richtung. Das Verhältniß $\frac{BLD}{BKF} = \frac{1}{r}$ ist unveränderlich, so lange von einerley Kreise die Rede ist, wozu r als Halbmesser gehört. Diese Betrachtungen leiten auf einen sehr deutlichen und ganz bestimmten Begriff vom Krümmungswinkel in dem Sinn, wie er dem Sprachgebrauch in der höhern Geometrie gemäß ist. Die Frage ist hier nicht mehr davon, unter welchem Winkel die Richtung des Kreises im Berührungspunct A selbst von der Tangente AB abweiche? Dieser Winkel heißt der Berührungswinkel, und derselbe ist in jedem Fall = 0. Die Frage ist vielmehr diese: wie groß der Winkel sey, unter welchem die Richtung des Kreises in einem nach A folgenden, von A also schon verschiedenen Punct n, von der Tangente AB abweiche? Man setzt voraus, daß man schon wisse, wie weit die letzte Richtung des eben so grossen mit dem Halbmesser = 1 beschriebenen Bogens von der Richtung in A abweiche: denn bey allen Messungen muß man ein bekanntes Maaß haben, um die auszumes-

sen-

sende Grösse damit zu vergleichen. Die Abweichung in n ist $\frac{An}{AC} = \frac{Am}{AC}$, man mag beyde gleiche Bogen An, Am, so groß, oder so klein nehmen wie man will.

28. §.

Wenn man den Winkel BKF $= \eta$, BLD $= \vartheta$ setzt, so sind die Schlüsse des vor. §. nichts anders als leichte Folgen aus der Gleichung $\vartheta = \frac{1}{r}\eta$ (26. §.) Wenn sich η gleichförmig ändert, so ändert sich auch ϑ gleichförmig, das Verhältniß $\frac{\vartheta}{\eta}$ bleibt $= \frac{1}{r}$, und es kann nie $\vartheta = \eta$ werden, so lange η noch ein Winkel ist, der sich angeben läßt. Es ist ganz einleuchtend, daß sich der kleinere Kreis AFH eben darum stärker krümme, als der grössere ADG, weil jeder Bogen Am des ersten im Endpunct m von der ersten Richtung AB um einen grössern Winkel abweicht, als ein eben so grosser Bogen An des grössern Kreises in seinem Endpunct n: dieserwegen kann jeder Abweichungswinkel eines Kreisbogens in seinem Endpunct von seiner ersten Richtung sein Krümmungswinkel heissen. Die Länge dieses Bogens mit dem Halbmesser dividirt giebt die Grösse dieses Winkels in Vergleichung mit dem Krümmungswinkel eines zum Halbmesser Eins gehörigen eben so langen Bogens. Der Kreis ADG krümmt sich ohne Zweifel eben darum nur halb so stark, als der Kreis AFH, weil in der Figur BLD $= \frac{1}{2}$BKF ist: so erhält man auch einen völlig bestimmten Begriff von der Grösse der Krümmung eines Kreises, sie ist dem Krümmungswinkel proportional, die Krümmungen ungleicher Kreise verhalten sich wie die Krümmungswinkel, also auch in umgekehrter Ordnung wie ihre Halbmesser. Die Krümmung eines

mit

mit dem Halbmesser Eins beschriebenen Kreises wird als bekannt angenommen, und hiemit wird die Grösse der Krümmung eines jeden andern Kreises leicht verglichen.

29. §.

53. Fig. Es ist eine eigenthümliche Eigenschaft des Kreises, daß gleiche Bogen eine gleiche Amplitude haben. Wenn also auch AN, NG, GH, gleiche Bogen einer vom Kreise verschiedenen krummen linie sind; so haben sie doch keine gleiche Amplitude, und eben darum wächst auch die Abweichung BLN der letzten Richtung des Bogens AN von seiner ersten Richtung AB nicht um gleiche Differenzen, wenn der Bogen um gleiche Differenzen wächst. Bey dem allen kann doch in einem ähnlichen Sinne wie beym Kreise (28. §.) der Winkel BLN der Krümmungswinkel des Bogens AN heissen, nur ist er nicht wie beym Kreise der Länge des Bogens proportional. Wenn ein Kreisbogen beschrieben wird, so ändert sich nur die Richtung nicht die Krümmung. Wenn dagegen eine andre krumme linie beschrieben wird; so ändert sich beydes Richtung und Krümmung.

30. §.

54. Fig. Die krumme linie AMam sey also nun vom Kreise verschieden, und AM sey ein Bogen von unbestimmter Länge; so ist zwar beydes Richtung und Krümmung bey jedem folgenden Punct m nicht mehr mit Richtung und Krümmung bey dem Punct M einerley, es mag m so nahe als man will bey M angenommen werden. Dem ohngeachtet kann man doch für jede Stelle M die Richtung angeben. Wenn bey M alle Aenderung der Richtung aufhörte, so würde der über M hinaus verlängerte Theil Mf mit der gradlinichten Tangente einerley seyn. Wenn dagegen bey M nur die Aenderung der Krümmung allein aufhörte, und die Krümmung über M hinaus nach m zu unverändert eben dieselbe bliebe, wie sie bey M war;

so würde der von M nach m zu verlängerte Theil ein Kreisbogen seyn. Wenn nun gleich Mam kein Kreisbogen ist, so kann man doch durch M und m allemahl auch einen Kreis BMam beschreiben, dessen Mittelpunct in die Normallinie MK fällt, wenn an der Sehne Mm bey m ein Winkel MmL = KMm verzeichnet wird, da dann die Spitze D des so verzeichneten gleichschenklichten Dreyeckes zugleich der gesuchte Mittelpunct ist. Dieser Kreis und der Bogen Mam haben in M eine gemeinschaftliche Tangente Mf, im m aber schneiden beyde krumme Linien einander, weil daselbst wie hier vorausgesetzt wird, ihre Tangenten me, ME, einander schneiden: also sind mef, mEf, die Abweichungswinkel von der gemeinschaftlichen Tangente in M. der Winkel mef ändert sich gleichförmig, wenn der Kreisbogen Mbm gleichförmig wächst oder abnimmt, der Winkel mEf aber ändert sich nicht um gleiche Differenzen, wenn der Bogen Mam um gleiche Differenzen wächst oder abnimmt: demnach ist das Verhältniß mEf: mef ein veränderliches Verhältniß.

31. §.

Man ziehe durch m auch die Normallinie mG des Bogens Mam, welche die gemeinschaftliche Normallinie MF in K schneidet, so ist MKm des Bogens Mam Amplitude. Eben so kann man durch M und jeden andern Punct m des Bogens Mam allemahl einen Kreisbogen ziehen, der diesen Bogen in M berührt und in m schneidet, es mag m so nahe bey M als man will angenommen werden. Bey dieser Veränderung der Stelle des Puncts m in dem Bogen Mam wird zugleich der Mittelpunct des durch M und m geführten Kreises seine Stelle verändern, also auch der Halbmesser MD nicht einerley bleiben. Wenn in der 54 Fig. m in a fällt, so erhält man ak anstatt mK, und ad anstatt mD. So lange aber a nicht mit M zusammen fällt, so lange können auch die Puncte k und d nicht zusammen fallen.

32. §.

32. §.

Nicht allein das Verhältniß des Kreisbogens zu seiner Sehne, sondern auch das Verhältniß des Bogens Mam zu seiner Sehne nähern sich desto mehr dem Verhältnisse der Gleichheit, je kleiner diese Bogen angenommen werden. Wenn nun eine Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten $AP = x$, $PM = y$, für die krumme Linie bekannt ist, und der Winkel $PMT = \varphi$ gesetzt wird, so hat man $\text{tang.}\varphi =$ der Gränze des Werthes $\frac{dx}{dy}$. Wächst aber die Abscisse x um eine unbestimmte Differenz $Pp = dx$, so wächst φ um die Differenz $d\varphi = mEf = MKm$. (Anfangsgr. der Math. Anal. 105. §.) Es sey der Bogen $AM = s$, also Mam eine unbestimmte Differenz desselben $= ds$; ferner sey des Kreisbogens Mbm Amplitude $MDm = d\psi$, sein Halbmesser $= r$: so sind beydes r und $d\psi$ veränderliche Grösen, die von der Länge des Bogens $Mam = ds$ abhängen (31. §.), und der Kreisbogen Mbm ist $= rd\psi$. Weil die Gränze des Werthes $\frac{ds}{\text{chord. Mm}} = 1$, und eben so die Gränze des Werthes $\frac{rd\psi}{\text{chord. Mm}} = 1$ ist; so muß auch die Gränze $\frac{ds}{rd\psi} = 1$ seyn.

33. §.

Die Sehnen gleich langer Kreisbogen, wenn diese zu ungleichen Halbmessern gehören, sind ungleich groß, die Sehne des weniger gekrümmten Bogens ist länger, als die Sehne des mehr gekrümmten: indessen ist doch die Gränze des Verhältnisses dieser Sehnen gegen einander das Verhältniß der Gleichheit. Es sey wie oben $AEF = \alpha$,

$ACF = \beta$, $AE = r$, $AC = mr$, also $ACF = \frac{1}{m}\alpha =$ $n\alpha$, wenn man $\frac{1}{m} = n$ setzt; so ist chord. $AF = 2r \sin. \frac{1}{2}\alpha$, chord. $AD = 2mr \sin. n\frac{1}{2}\alpha$. Das giebt $\frac{\text{chord. AD}}{\text{chord. AF}} = \frac{m \sin. n.\frac{1}{2}\alpha}{\sin. \frac{1}{2}\alpha}$, und es ist $\sin. n.\frac{1}{2}\alpha = n.(\cos.\frac{1}{2}\alpha)^{n-1} \sin.\frac{1}{2}\alpha - \frac{n\ n-1.n-2}{1.2.3}(\cos.\frac{1}{2}\alpha)^{n-3}\sin.\frac{1}{2}\alpha^3 + \ldots\ldots$, also $\frac{\text{chord. AD}}{\text{chord. AF}} = (\cos.\frac{1}{2}\alpha)^{n-1} - \frac{n-1.n-2}{1.2.3}\cos.\frac{1}{2}\alpha^{n-3}\sin.\frac{1}{2}\alpha^2 + \ldots\ldots$ Wird nun $\alpha = 0$ gesetzt, so giebt das $\frac{\text{chord. AD}}{\text{chord AF}} = 1$.

Es folgt dieses auch schon, wenn man voraussetzt, daß beyde Bogen AD, AF, zwar kleiner werden, aber dabey doch allemahl gleich groß bleiben sollen. Denn die Gränze des Verhältnisses jedes Bogens zu seiner Sehne ist das Verhältniß der Gleichheit: also ist $\frac{\text{Arc. AD}}{\text{chord. AD}} = 1 = \frac{\text{Arc. AF}}{\text{chord. AF}}$, mithin auch $\frac{\text{chord. AD}}{\text{chord. AF}} = 1$, wenn Arc. AD = Arc. AF bleibt. Die Amplituden beyder Bogen bleiben dagegen in einem beständigen Verhältnisse, und es kann das Verhältniß $\frac{AEF}{ACD}$ sich der Gränze 1 gar nicht nähern.

34. §.

Weil in jedem Punct des Bogens Mam, der nach M folgt, die Krümmung schon von der Krümmung in

M verschieden ist; so mag man den Bogen Mam so klein annehmen, als man will, er wird nie völlig die Natur eines Kreisbogens haben: beyde Normallinien MD, MK, können nie gleich groß werden, so lange m noch von M verschieden ist. Denn im Dreyeck mKD hat man KD = $\frac{MD.\ \sin.(d\psi - d\varphi)}{\sin. d\varphi}$, also ist MK = MD + DK = $(1 + \frac{\sin.(d\psi - d\varphi)}{\sin. d\varphi})$MD, und das giebt $\frac{MK}{MD} = 1 + \frac{\sin. d\psi \cos. d\varphi}{\sin. d\varphi} - \cos. d\psi$. So lange m noch von M verschieden ist, so lange sind $d\psi$ und $d\varphi$ ungleich, und $\frac{MK}{MD}$ ist kein Verhältniß der Gleichheit.

35. §.

Setzt man voraus, daß endlich m mit M zusammen falle, so fallen zugleich beyde Tangenten mE, me, mit Mf zusammen, und eben so beyde Normallinien mK, mD, mit MF. In dem Fall, welchen die 54 Figur vorstellet, ist allemahl $d\psi > d\varphi$, also auch $\sin. d\psi > \sin. d\varphi$, aber $\cos. d\psi < \cos. d\varphi$, also MK > MD. In dem Fall, welchen die 55 Figur vorstellet, ist das alles nur umgekehrt. Bey eben der Voraussetzung, daß m mit M zuletzt zusammen falle, erreicht das Verhältniß $\frac{d\psi.}{d\varphi}$ die Gränze = 1. Denn im Dreyeck MmK ist der Winkel an m = $90° - \frac{1}{2}d\varphi + d\varphi - d\psi. = 90° - (d\psi - \frac{1}{2}d\varphi)$, und überdem ist chord. Mm : sin $d\psi$ = MK : sin MmK. Daraus folgt MK sin. $d\psi$ = chord. Mm cos. $(d\psi - \frac{1}{2}d\varphi)$, also MK = chord. Mm. (cot. $d\psi$ cos. $\frac{1}{2}d\varphi$ + sin. $\frac{1}{2}d\varphi$), oder $MK = \frac{\text{chord. Mm}}{\text{Bog. Mam}}$. Bog. Mam. (cot. $d\psi$ cos $\frac{1}{2}d\varphi$ + sin. $\frac{1}{2}d\varphi$). Die Voraussetzung, daß m mit M zusammen fallen

fallen solle, erfodert, daß man Bog. Mam = o setze: alsdenn wird $\frac{\text{Sehne Mm}}{\text{Bog. Mam}} = 1$, Bog. Mam = rd$\psi$, (32. §.), sin $\frac{1}{2}$dφ = o, cos $\frac{1}{2}$dφ = r, und man findet $MK = rd\psi \cos. d\psi = \frac{rd\psi \cos d\psi}{\sin. d\psi}$, oder $\frac{MK}{r} = \frac{MK}{MD} = \frac{d\psi \cos.\psi}{\sin.\psi}$. Weil nun d$\psi$ der Voraussetzung gemäß verschwindet, so ist $\frac{d\psi}{\sin. d\psi} = 1$, cos. d$\psi$ = 1, und man erhält $\frac{MK}{MD} = 1$ als die Gränze des veränderlichen Verhältnisses $\frac{MK}{MD}$.

35. §.

Im 32. §. war die allgemeine Gleichung $\frac{MK}{MD} = 1 + \frac{\sin. d\psi \cos. d\varphi}{\sin. d\varphi} - \cos. d\psi$. Weil nun wenn m in M fallen soll dφ = o, dψ = o und $\frac{MK}{MD} = 1$ wird (35. §.) so findet man auch die Gränze $\frac{\sin. d\psi}{\sin. d\varphi} = 1$, oder die Gränze $\frac{d\psi}{d\varphi} = 1$. Weil nun im 32. §. die Gränze $\frac{ds}{rd\psi} = 1$ war, so wird zugleich die Gränze $\frac{ds}{rd\psi} = 1$, und $r = \frac{ds}{d\varphi} = MK$. Wenn also der

Halbmesser $MH = \frac{ds}{d\varphi}$ genommen, und der Kreisbogen MN beschrieben wird, so kann derselbe den Bogen Mam nicht mehr schneiden, und man kann mit keinem andern Halbmesser, der MH so wenig man will übertrift, (54. Fig.) durch M einen Bogen beschreiben, der zwischen Mam und MN durchginge, ohne daß er Mam schon schnitte. Jeder Bogen mit einem Halbmesser, der kleiner als MH ist, eben so beschrieben liegt ganz an der hohlen Seite des Bogens MN. Diesemnach ist MN eine Gränze zwischen allen Kreisen, welche Mam schneiden, und allen, welche diesen Bogen Mam bloß berühren. In dem Fall, welchen die 54 Figur vorstellet, ist der Kreis MN kleiner als alle Kreise, welche Mam noch schneiden, und grösser, als alle Kreise, welche diesen Bogen bloß berühren.

37. §.

Das leitet auf die Folge, die Krümmung des Bogens Mam müsse an der Stelle M mit der Krümmung des Kreises MN einerley seyn. Wenn nemlich in M alle Aenderung in der Krümmung der Linie AM aufhörte; so würde der über M hinausfallende Theil mit dem Kreisbogen MN einerley seyn Der Kreis MN heißt daher der Krümmungskreis für die Stelle M, und sein Halbmesser der Krümmungshalbmesser. Alle andre Kreise die ihre Mittelpuncte in MF haben, lenken sich anfangs bey M entweder weniger, oder mehr von der Tangente Mf ab, als der Bogen Mam sich davon ablenkt. In der 55 Figur würde der Mittelpunct eines Kreises, der diese Eigenschaft hätte, viel weiter als D von M entfernt seyn: sie ist nur darin von der 54 Figur verschieden, daß in dem Fall, welchen diese 55 Figur vorstellet, der Krümmungskreis grösser ist, als alle Kreise, welche Mam noch schneiden, und kleiner, als alle Kreise, welche diesen Bogen bloß berühren.

38. §.

38. §.

Diesen Schlüssen gemäß sind Krümmungswinkel und Berührungswinkel nicht einerley. Es ist nicht einerley, ob man die Richtung eines Kreisbogens BMm, oder einer andern krummen linie AMam, an einer gegebenen Stelle M wissen will, oder anstatt dessen, die erste Ablenkung der krummen Linie von der Richtung in M. Mehrere Kreise, mehrere krumme linien, können einander in einerley Punct M berühren, wenn sie daselbst eine gemeinschaftliche gradlinichte Tangente haben: an der Stelle M selbst machen sie alsdenn mit dieser Tangente gar keinen Winkel, weil ja sonst ihre Richtung an dieser Stelle mit der Richtung der Tangente nicht einerley wäre. Dagegen kann der erste Ablenkungswinkel von dieser Richtung für alle solche krumme linien verschieden seyn. Dieser erste Ablenkungswinkel ist nicht der erste, den man in der Zeichnung darstellen, sondern der erste, welchen sich der Verstand vorstellen kann.

39. §.

Die Verhältnisse dieser ersten Abweichungswinkel lassen sich angeben. Ist von zweyen Kreisen die Rede, so verhalten sich diese ersten Ablenkungswinkel, wie jede zwey andre, die mit gleichlangen Bogen zusammen gehören. Eben so lassen sich die ersten Ablenkungswinkel zweyer andrer krummer linien von ihrer gemeinschaftlichen Tangente im Berührungspunct mit einander vergleichen. Für jede läßt sich ein Kreis angeben, der dieselbe gradlinichte Tangente in eben demselben Punct berührt, dessen erster Ablenkungswinkel von der Tangente eben so groß ist, als der erste Ablenkungswinkel der damit zusammen gehörigen krummen linie, nemlich der Krümmungskreis für diese Stelle: (36. §.) also verhalten sich die ersten Ablenkungswinkel beyder krummer linien gegen einander umgekehrt, wie die Halbmesser dieser Krümmungskreise, welche ver-

mittelst der Formul $r = \frac{ds}{d\varphi}$ (35. §.) gefunden werden.

Die nähere Anleitung dazu findet man in meinen Anfangsgründen der Mathematischen Analysis und höhern Geometrie, IV. Abschnitt 107. u. f. §§.

40. §.

Durch den bisherigen Vortrag wird zugleich der Inhalt des 58. §. der oben stehenden I. Abhandlung umständlich erläutert. Will man die gemeine algebraische Rechnungssprache beybehalten; so kann man alles leicht in diese Sprache übersetzen. Man stelle sich einen Bogen wie Mam unendlich klein vor, so ist er seiner unendlich kleinen Sehne gleich; auch ist die gebrochene Linie MEm unendlich klein und eben so groß, als Sehne oder Bogen. Der Theil ME macht mit der Tangente Mf gar keinen Winkel, ME stellet die Richtung des Bogens Mm in seinem Anfangspunct vor, er macht hier mit der Tangente gar keinen Winkel, das heißt der Berührungswinkel in M ist = o. Aber mE weicht von Mf um einen unendlich kleinen Winkel mEf ab, dieser ist nicht in eben dem Sinne = o, mE stellt die Richtung des unendlich kleinen Bogens in seinem Endpunct vor, und Mam hat schon eine unendlich kleine Amplitude, die = mEf ist. Der unendlich kleine Abweichungswinkel mEf ist der Krümmungswinkel: er würde für weiter folgende gleiche Bogen um eben so grosse Differenzen wachsen, wenn die Krümmung sich nicht weiter änderte. Das würde der Fall seyn, wenn man durch M und m einen unendlich kleinen Kreisbogen führte, dessen Amplitude = mEf wäre: er würde mit dem Bogen Mam völlig zusammen fallen, und mit ihm einerley Krümmung haben.

Noch einige Zusätze zur ersten Abhandlung.

78. Seite.

Von der ersten Abhandlung hatte ich, nachdem sie abgedruckt war, einige Exemplare an einsichtsvolle Freunde mit der Bitte vertheilt, wenn ihnen Stellen vorkommen mögten, welche nach ihrem Urtheil mehr Bestätigung oder Erläuterung bedürften, ihre Gedanken darüber mir mitzutheilen. Einer von diesen Freunden hat gegen die am Ende der 78 Seite befindliche Stelle die Bedenklichkeit geäussert: „ich hätte hier, wie es schiene, behauptet, Newtons Fluxionen und Leibnitzens Differentialien wären völlig einerley.„ Dem stehe aber das entgegen, was Newton selbst in dem berühmten Scholion (Philos. Natur. Princip. Mathem. Sect. II. beym Lemm. II.) gegen das Ende desselben mit den Worten davon sage:

„rescripsit vir Clarissimus (Leibnitius) se quoque in ejusmodi methodum incidisse, et methodum suam communicauit a mea vix abludentem praeterquam in verborum et notarum formulis, *et idea generationis quantitatum.*„

Eben diese Worte aus eben demselben Scholion habe ich im 67. §. aus der ersten londner Original-Ausgabe vom Jahr 1687 angeführet: daselbst fehlen aber die letzten hier mit andrer Schrift gedruckten Worte:

et idea generationis quantitatum.

Das muß also wohl ein Zusatz seyn, der in der 2ten Ausgabe allererst beygefügt ist: in der 3ten Ausgabe stehet, wie allgemein bekannt ist, ein ganz anders lautendes Scholion. Ich besitze die 2te Ausgabe nicht, kann sie also

nicht vergleichen. In der bekannten mit einem vollständigen Commentar versehenen Ausgabe der Herrn Le Seur und Iacquier, wobey die dritte Original-Ausgabe zum Grunde gelegt ist, fängt im Tom. II. pag. 61. die beygefügte Anm. † mit den Worten an:

In *praecedentibus editionibus* istud scholium hoc modo se habebat;

es ist also in der mehrern Zahl von beyden vorigen Ausgaben die Rede, welches anzuzeigen scheint, das Scholion laute in beyden völlig übereinstimmend. Das hier abgedruckte Scholion lautet auch sonst bis auf eine nichtsbedeutende Kleinigkeit von Wort zu Wort völlig so, wie ich es in meinem eben angeführten Exemplar von der ersten Ausgabe finde; nur die eben bemerkten Worte:

et idea generationis quantitatum,

finden sich in der Ausgabe der Herrn le Seur und Iacquier, aber nicht in der I. Londner Ausgabe von 1687.

In der ganz neuen Ausgabe, welche Herr Professor Tessaneck in Prag ebenfalls mit einem vollständigen Commentar heraus giebt, steht im Part. I. Libri II. Pragae 1783 pag 36. alles so, wie in der Ausgabe der Herrn Le Seur und Iacquier.

Dem sey indessen, wie ihm wolle, der kleine Zusatz, wovon hier die Rede ist, stößt das gewiß nicht um, was ich auf der 78. Seite gesagt habe. Hier stehet keinesweges die Behauptung:

daß Newtons Fluxionen und Leibnitzens Differentialien völlig einerley sind,

vielmehr hatte ich kurz vorher im 68. §. 77. §. gesagt, was Newton momenta nennt, sey mit Leibnitzens Differentialien einerley. Daraus und aus dem, was weiter im 69. §. folgt, konnte ich die Folge ziehen

Newtons Fluxionenrechnung, und Leibnitzens Differentialrechnung, sey nicht allein in Ansehung der Rechnungsregeln selbst, (und dagegen hat hoffentlich nie-

mand

mand etwas einzuwenden) sondern auch in Ansehung der Gründe, worauf beyde beruhen, vollkommen einerley: nur habe Newton diese Gründe (freylich nur hie und da in seinen Schriften zerstreut) besser, deutlicher und völlig mathematisch richtig angegeben.

In seiner Abhandlung: Methodus fluxionum et serierum infinitarum, an der Stelle welche ich auf der 78. S. angeführt habe, setze man Leibnitzens dx, dy, anstatt Newtons $\dot{x}o$, $\dot{y}o$, (das sind nemlich Newtons momenta; $\dot{x}$, $\dot{y}$, sind seine Fluxionen) und schreibe hiernächst das ganze Exempel ab: alsdenn wäre ich doch begierig zu wissen, worin sich nun Newtons Einleitung der ganzen Rechnung von der Leibnitzischen Methode unterscheide.

In der Gleichung

$$x^3 - axx + axy - y^3 = o$$

soll $x + dx$ und $y + dy$ anstatt x und y geschrieben werden, und das giebt eine Gleichung, wovon man die vorige subtrahiren kann, so bleibt

$$3xxdx - 2axdx + aydx + axdy - 3yydy + 3xdx^2 - adx^2 + adxdy - 3ydy^2 + dx^3 - dy^3 = o.$$

Nach Leibnitzen nimmt man dx, dy, unendlich klein an, damit die höhern Potenzen davon in Vergleichung mit der ersten verschwinden: darum bleiben nur die fünf ersten Glieder der Gleichung. In eine andre Sprache übersetzt heißt das: wenn die Gränze $\frac{dy}{dx}$ sich bestimmt angeben lässet, so verstehet es sich von selbst, daß $\frac{dy^2}{dx} = \frac{dy}{dx}.dy = o$ sey, wenn dx und dy beyde zugleich Null werden, u. s. f.

Nach Newton sind dx, dy, oder $\dot{x}o$, $\dot{y}o$, ebenfalls unendlich klein, denn es sind Producte aus endlichen Grössen $\dot{x}$, $\dot{y}$, in eine unendlich kleine Grösse o; (m. s.

oben 75. 76. S. den 67 u. 68. §. der I. Abh.) es sind in der unendlich kleinen Zeit o mit den Geschwindigkeiten $\dot{x}$, $\dot{y}$, beschriebene unendlich kleine Wege. Die ersten 5 Glieder der Gleichung haben den Factor o, die folgenden vier den Factor oo, die beyden letzten den Factor ooo. Wird alles mit o dividirt, so bleiben vier Glieder mit dem Factor o, und zwey mit dem Factor oo; diese verschwinden also, weil o unendlich klein ist, und die ersten 5 Glieder bleiben nach Newtons Bezeichnung so ausgedrückt

$$3\dot{x}\dot{x}\dot{x} - 2a\dot{x}\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y\dot{y}\dot{y} = 0.$$

Wenn dieser Vortrag aus andern Stellen in Newtons Werken nicht mehr licht erhielte, so würde man schwerlich recht deutlich wissen können, was er eigentlich haben will. Der Zusammenhang in seinen Schlüssen läßt sich aber so übersehen.

Wenn x, y, noch von einer dritten veränderlichen Grösse z abhängen, wovon man voraussetzt, daß sie gleichförmig wachse; so ist sein o soviel als Leibnitzens dz, und $\dot{x}$, $\dot{y}$, soviel als die Gränze $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$. Wenn also x = z ist, oder dx selber gleichförmig wächst; so ist $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$, und man hat

$$3xx - 2ax + ay + ax.\frac{dy}{dx} - 3yy.\frac{dy}{dx} = 0.$$

Wie gesagt, wenn ich nicht aus andern Stellen in Newtons Schriften, welche ich oben in der I. Abhandlung grösstentheils angeführt habe, mich davon unterrichtet hätte, wie alles zusammen hienge; so würde ich hier ex idea generationis quantitatum keine sonderliche Belehrung finden. Das o ist anfangs bey Einleitung der Rechnung eine ganz unbestimmte Grösse. $\dot{x}o$, $\dot{y}o$, sind davon abhängende unbe-

unbestimmte Incremente: daraus rechtfertiget es sich, daß man die gefundene Gleichung mit o dividiren könne. Nach der Division läßt man o verschwinden, weil man eine Gleichung zwischen den Gränzen $\dot{x}$, $\dot{y}$, nicht zwischen den unbestimmten Incrementen $\dot{x}o$, $\dot{y}o$, sucht.

Newtons Fluxionen und Leibnitzens Differentialien sind demnach eben so von einander unterschieden, wie Newtons Fluxionen und Newtons momenta, incrementa vel decrementa momentanea: diese letztern sind mit Leibnitzens Differentialien völlig einerley. In der Gleichung $3x^2dx - 2axdx + aydx + axdy - 3yydy = o$, sind dx, dy, momenta; wenn z gleichförmig wächst, also dz ein unveränderliches Moment ist, (das tempus per analogiam) wovon dx, dy, als veränderliche Momente abhängen, so ist auch $(3x^2 - 2ax + ay).\frac{dx}{dz} + (ax - 3y^2).\frac{dy}{dx} = o$, und $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, sind veränderliche Fluxionen. Ist dx selbst unveränderlich, so hat man

$$3x^2 - 2ax + ay + (ax - 3y^2).\frac{dy}{dx} = o,$$

und man müste nach Newtons zuerst gewählten Bezeichnung $3x^2 - 2ax + ay + (ax - 3y^2)\,\dot{y} = o$ schreiben, es wäre nun dx das tempus per analogiam.

In den Princip. Phil. Nat. Math. Lib. II. Lemm. II. wird A, B, statt x, y, a, b, statt $\dot{x}$, $\dot{y}$, geschrieben. Das Moment von A^n ist nun $= nA^{n-1}.a$, die Fluxion wäre, wenn der einmahl festgesetzte Sprachgebrauch bleiben sollte $\frac{A^n}{a} = nA^{n-1}$.

Newton selbst redet hier schon so, daß er zu erkennen giebt, es sey gleichviel ob a, b, momenta, oder fluxiones heissen sollen.

Momenta, vel *mutationum velocitates* dicantur, a, b, c, etc. (a. a. O. I. Ausg. 251. S.)

Das Moment $nA^{n-1}.a$ ist der Fluxion nA^{n-1} proportional, wenn a constant ist. Man betrachtet nur die Verhältnisse der Fluxionen, also kann man bey der Rechnung die Momente statt der Fluxionen behalten, weil jene sich wie diese verhalten. Alsdenn stellen a, b, unveränderliche Fluxionen vor, womit man die davon abhängenden veränderlichen vergleicht; an sich sind es nichts anders, als unveränderliche selbst nach Newtons Sprache unendlichkleine Differenzen, womit man die veränderlichen vergleicht.

Dey dieser Vorstellung bleibt auch Maclaurin, wie ich oben im 79. §. der 1. Abh. 89. S. bemerkt habe, womit man Maclaurins Werk Tom. II. Art. 701, 704, 706, vergleichen kann. Ich finde also keinen Grund, mein Urtheil über den vermeinten Unterscheid zwischen Fluxionen- und Differentialrechnung zurück zu nehmen. Wenngleich Newtons Fluxionen mit seinen Momenten vermöge der Begriffe, die er davon festsetzt, nicht ganz einerley sind; so werden sie es doch, sobald er sie in Rechnung bringt Mit dem Vortrage beym Maclaurin hat es eben dieselbige Bewandniß.

Jetzt geben sich die mathematischen Schriftsteller Mühe deutlich zu schreiben: es scheint mir wenigstens so, daß man entweder vormahls oft nicht ohne Absicht undeutlich geschrieben habe, oder daß es den Erfindern, und andern, welche die Erfindungen weiter bekannt machten, oft selbst noch an der rechten Deutlichkeit der Grundbegriffe gefehlt haben müsse. Mir hat es immer merkwürdig geschienen, daß Newton sein Unendlichkleines mit dem Buchstaben o, nicht mit der Null bezeichnet. Wollte er vielleicht im Grunde eben so etwas damit sagen, als nach den gemeinsten Vorstellungen das leibnitzische dx, dy, bezeichnen soll? ein Mittelding zwischen Nichts und Etwas?

was? Der Vortrag an der im 67 und 69. §. angeführten Stelle allein giebt darüber keinen ganz deutlichen Aufschluß: man muß die Stellen vergleichen, welche ich im 68. §. der I. Abh. aus den Princip. Phil. Nat. Math. angeführt habe.

Sehr interessant wäre übrigens eine möglichst genaue und vollständige Geschichte der Begriffe und Lehrsätze vom Mathematisch Unendlichen. Mehrere neuere Schriftsteller, wenn sie die Geschichte der Mathematik berühren, erzählen uns, daß Kepler in seiner Stereometria doliorum, Linz, 1615, zuerst den Nahmen und Begriff des Unendlichen eingeführt habe. Auch Montucla stimmet damit überein in der Histoire des Mathematiques Tom. II. pag. 17.

„Il (*Kepler*) osa le premier introduire dans le langage ordinaire le nom et l'idée de l'infini. Le Cercle n'est, dit-il, que le composé d'une infinité de triangles, dont les sommets sont au centre, et les bases forment la circonference. — — — „

Eine ähnliche Sprache in der Lehre vom Kreise, worüber man sich doch sehr richtig geometrisch erklärte, muß man wohl schon früher geredet haben. In Stifelii Arithmetica integra, welche ich in den obenstehenden Abhandlungen mehrmahls angeführt habe, findet sich ein

Appendix Libri Secundi De Quadratura Circuli, (a. a. O. fol. 224.)

der in mehrern kurzen Sätzen bestehet, wovon die drey ersten den Sinn der Frage de quadratura circuli so festsetzen, daß von circulo mathematico nicht physico die Rede seyn solle. Hiernächst folgen die nachstehenden drey Sätze.

4. Triangulus est polygoniarum omnium prima.
5. Omnium polygoniarum vltima est circulus.
6. Recte igitur describitur circulus mathematicus esse polygonia infinitorum laterum.

Diese drey Sätze sind ganz in Newtons Geist geschrieben: der Kreis ist unter allen regulären Polygonen das letzte, er ist die Gränze, die kein inneres übertreffen, und unter welche kein äusseres abnehmen kann; ja eine solche Gränze, die eigentlich kein reguläres Polygon ganz erreichen kann. Wenn es mir nicht bisher an den nöthigen Hülfsmitteln gefehlt hätte, wozu bey Untersuchungen dieser Art vornemlich der verstattete Gebrauch vollständiger Büchersammlungen gehört; so hätte ich schon den Versuch gemacht, eine kleine Lücke in der Geschichte der Mathematik, die ich hier bemerkt zu haben glaube, zu ergänzen.

Zum 44. §. 47. Seite.

„Die Ausdrücke vom Unendlichkleinen ganz zu vermeiden, (das ist eine Bedenklichkeit eines andern Freundes) scheint nicht rathsam zu seyn. Die kurzen Regeln, wie Grössen, die unendlich wachsen oder abnehmen, gegen einander, oder gegen andre verschwinden, u. s. w. werden gleichwohl wegen der promten Resultate, die sie verschaffen, ihren Werth behalten, wenn sie gleich nach der in der I. Abh. vorgetragenen Theorie allererst in ihrem völligen Licht erscheinen.„

Hiegegen habe ich gar nichts einzuwenden, ich habe vielmehr eben dasselbe in der ersten Hälfte des 44. §. 46. Seite gesagt. Ich wünsche nur, daß man künftig in Elementarbüchern, und selbst etwas vollständigern Werken, die zum Unterricht für solche Leser geschrieben werden mögten, welche die Wissenschaft daraus lernen wollen, die bisher gewöhnlich gewesene Ordnung umkehre. (28. §.) Die kurzen aus den im 29—42 §. beurtheilten Vorstellungsarten hergenommenen Regeln, nach welchen man die gesuchten Resultate so leicht und promt findet, sind Conclusionen beym Vortrage einer richtigen Theorie; die Grundlehren von den Gränzen der Werthe veränderlicher Grössen, von den Gränzen veränderlicher Verhältnisse und Summen,

sind

sind die Prämissen dazu. Man fange also mit diesen sichern, deutlichen und wahrhaft mathematischen Grundlehren den Vortrag an, leite hiernächst die bekannten Regeln daraus her, und übersetze sie in die gemeine Sprache vom Unendlichen: vergesse aber auch nicht, den Leser zu erinnern, daß das alles nur Rechnungssprache sey, die zwar beym algebraisch-analytischen Vortrage der Geometrie gebraucht werden könne, übrigens aber keinesweges für die reine Geometrie gehöre.

Zum 28. §. 28. S. unten.

Die hier vorkommende Stelle:

Eines andern neuen Grundsatzes, den die Academie zu forbern scheint, bedürfen wir nicht, — — —

hat die Erinnerung veranlasset,

„es scheine daraus zu folgen, als wenn ich die Preisfrage der Königl. Academie für überflüssig halte, und gleichwohl hätte ich mich selbst gegen die gewöhnlichen Lehren vom Mathematisch-Unendlichen erklärt, und wolle sie sogar aus den Lehrbüchern weggelassen wissen.„

Ueber den letzten Punct habe ich mich eben erklärt, und was den ersten Punct betrift, so glaube ich, es erhelle aus meinem ganzen Vortrage, daß nach meiner Ueberzeugung die Preisfrage für den jetzigen Zustand der Wissenschaft recht sehr interessant sey. So wie die Nachricht, welche ich auf der 4. Seite habe abdrucken lassen, gefaßt ist, enthält sie zwey Fragen, wovon die letzte die erste gewissermassen aufzuheben scheint. Man verlangt

une theorie claire et précise de ce qu'on appelle *Infini* en Mathématiques.

Grosse Analysten aber, so lautet es gleich nachher, hätten eingestanden,

que les termes *grandeur infinie* sont contradictoires.

Deßwegen soll man zeigen, wie aus einer widersprechenden Voraussetzung (supposition contradictoire) so viele wahre Lehrsätze hätten gefolgert werden können, und man soll

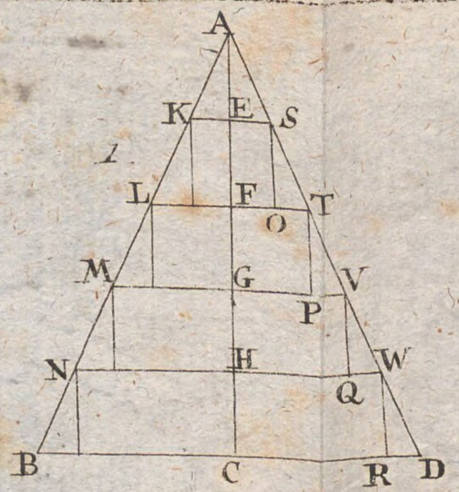
un principe sûr, clair, en un mot vraiment mathématique, propre a être substitué a l' Infini

anzeigen, ohne die vermittelst desselben anzustellenden Untersuchungen zu erschweren.

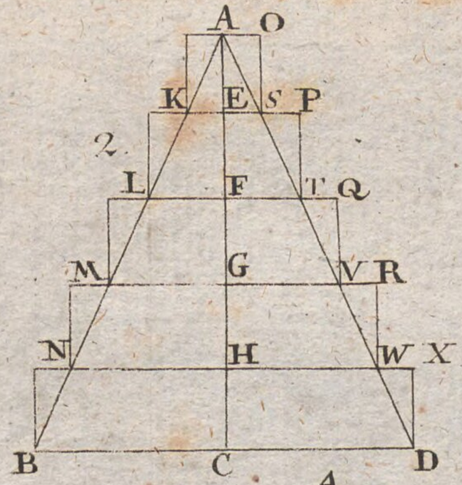
Daß in dem Ausdruck: Unendliche Grösse kein Widerspruch liege, glaube ich im 18. u. f. §. 19, u. f. S. bewiesen zu haben; er bezeichnet indessen nur einen algebraischen Grundbegriff, den man nicht in die reine Geometrie übertragen muß. Die Sprache worin man die Rechnungsregeln mit dem Unendlichkleinen, dem Unendlichgrossen und ihren unzähligen Ordnungen eingekleidet hat, lautet zwar sehr widersprechend: allein ich habe gewiesen, daß von dieser Sprache nichts abhängt. Die Sache selbst war und blieb immer mathematisch richtig.

(39. §.) Wenn ich nun aus dem allen folgere, daß wir keines andern neuen Grundsatzes bedürfen, weil die sichern, deutlichen und wahrhaft mathematischen Gründe, worauf alles beruhet, (die Grundbegriffe von den Gränzen der Werthe veränderlicher Grössen) eben so lange, als die Rechnungsregeln schon bekannt gewesen sind;

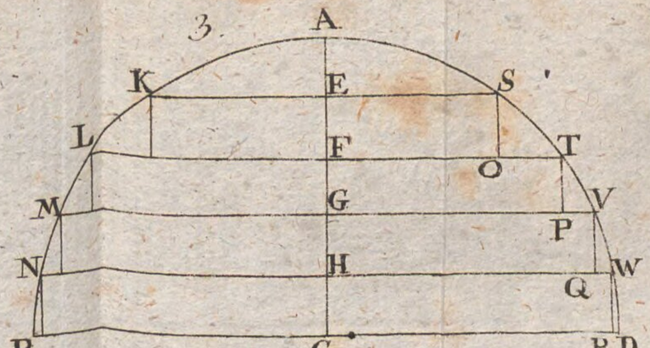
so erkläre ich dadurch die Preisfrage gewiß nicht für überflüssig. Ich gebe vielmehr der zweyten Foderung der Academie gemäß solche wahrhaft mathematische Grundlehren an, welche an die Stelle der gemeinen Vorstellungsarten vom Unendlichen gesetzt werden können. Weil diese Grundlehren längst bekannt gewesen sind, so konnte ich hinzu setzen, daß wir keines andern neuen Grundsatzes bedürfen: ich denke, das heisse nicht die Preisfrage selbst, sondern nur die Bemühung für überflüssig erklären, wenn jemand suchen wollte, hier ganz neue sonst unbekannt gewesene Grundsätze zu erfinden.



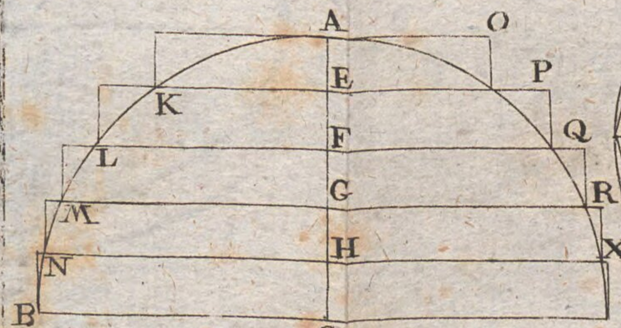
1



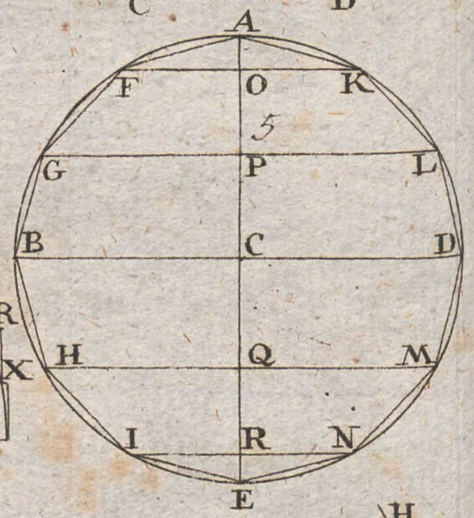
2.



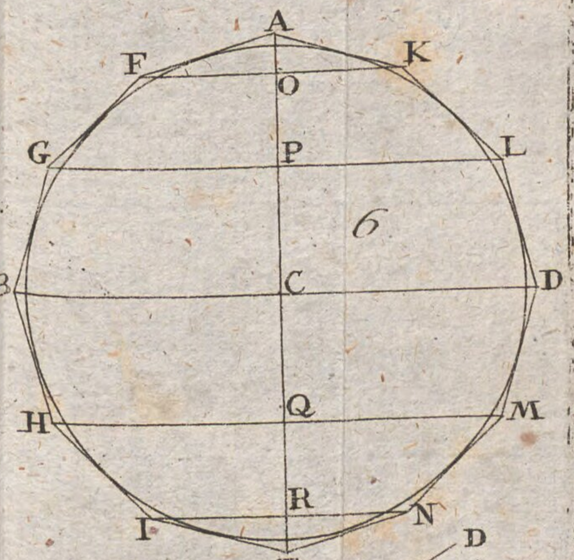
3.

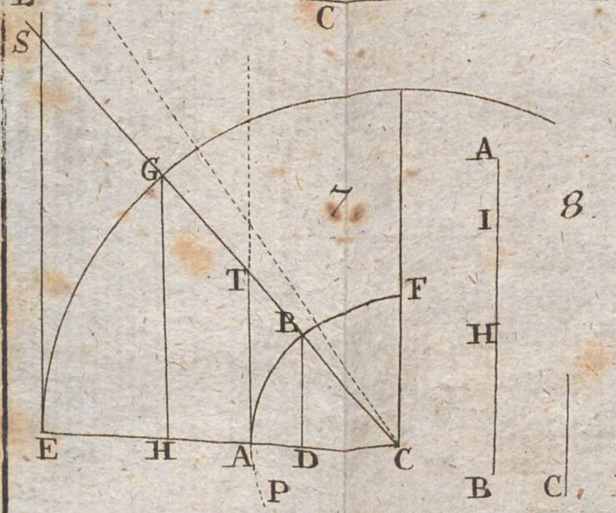


4.



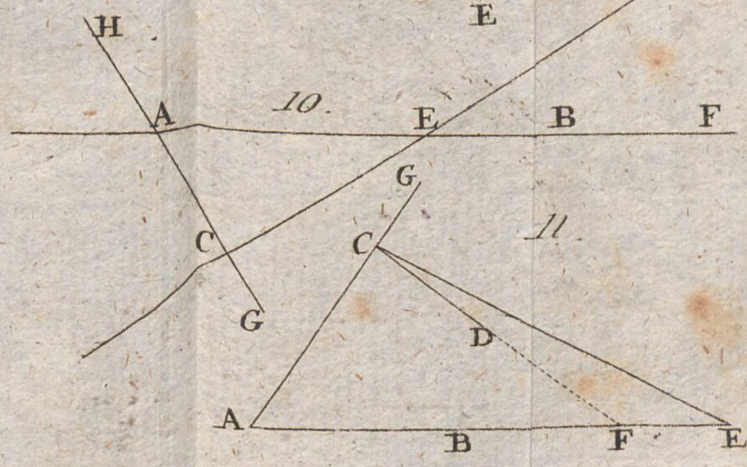
5



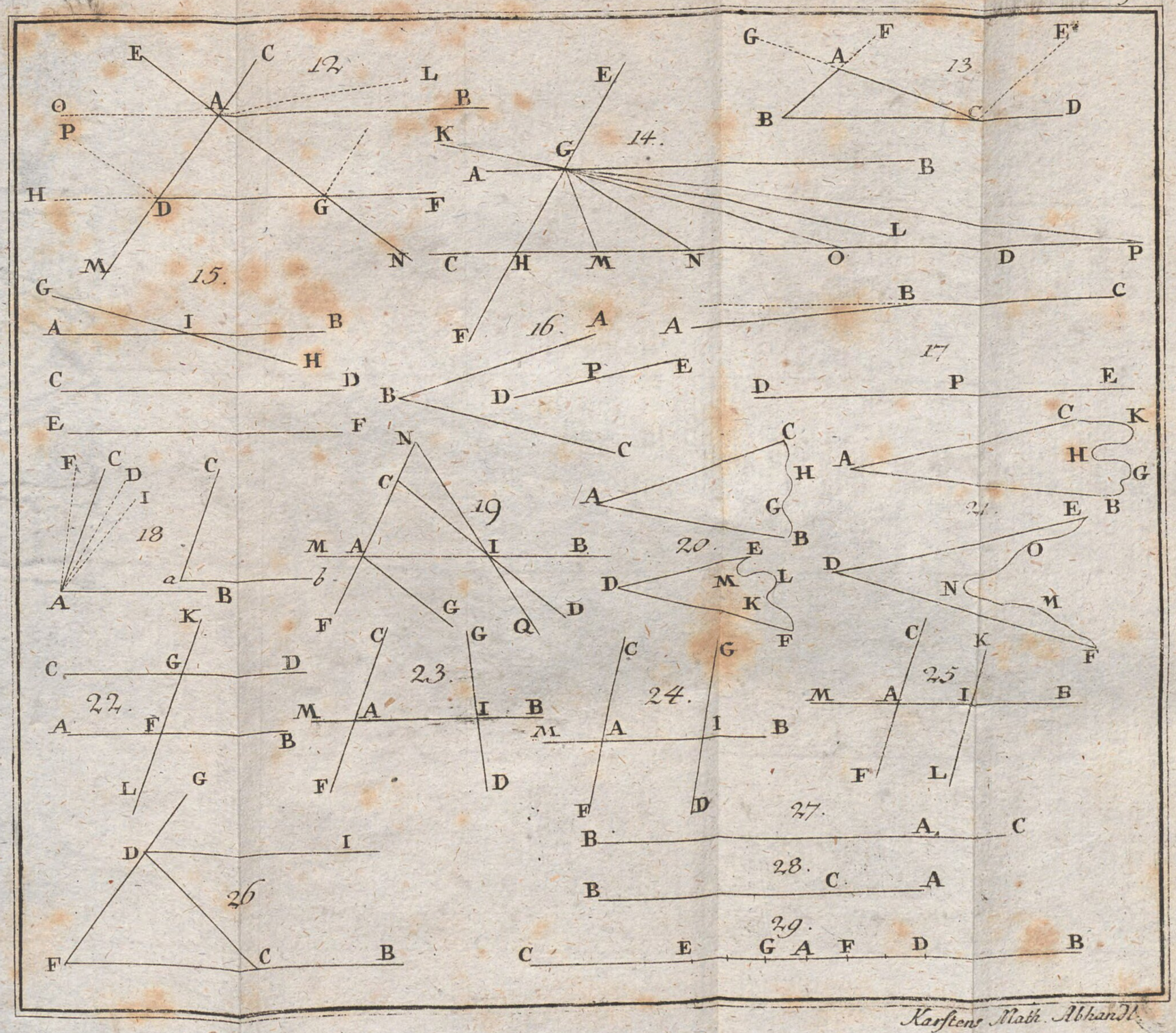


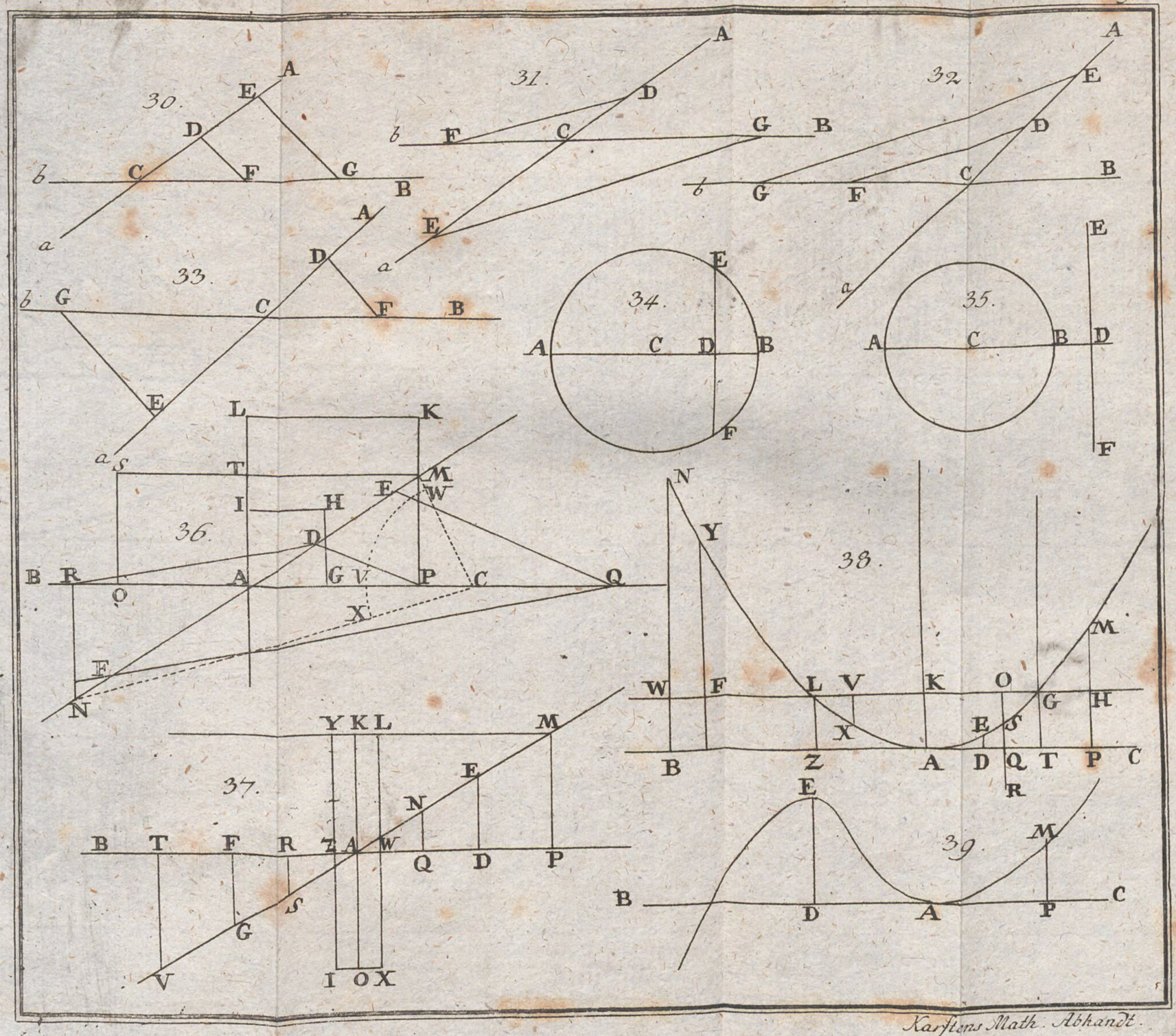
7

8 9



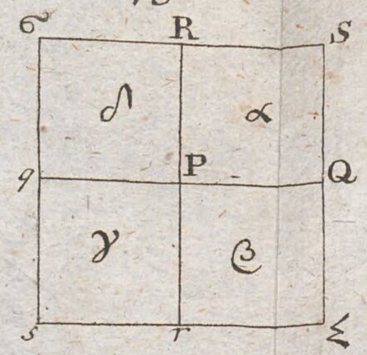
Karstens Math. Abhandl.


12
13
14.
15.
16
17
18
19
20
21
22.
23.
24.
25
26
27.
28.
29.

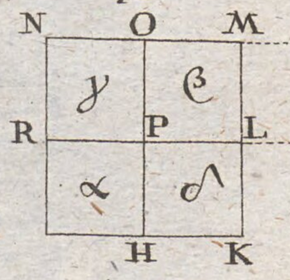


Karstens Math. Abhandl.

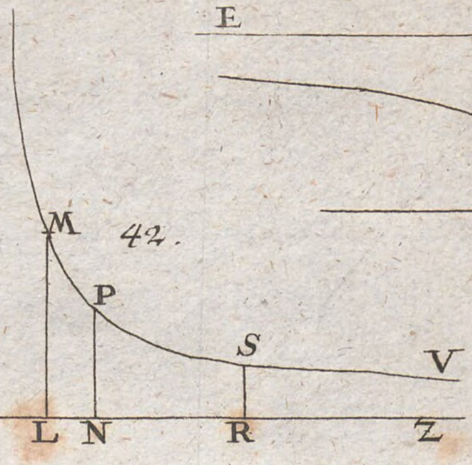
40



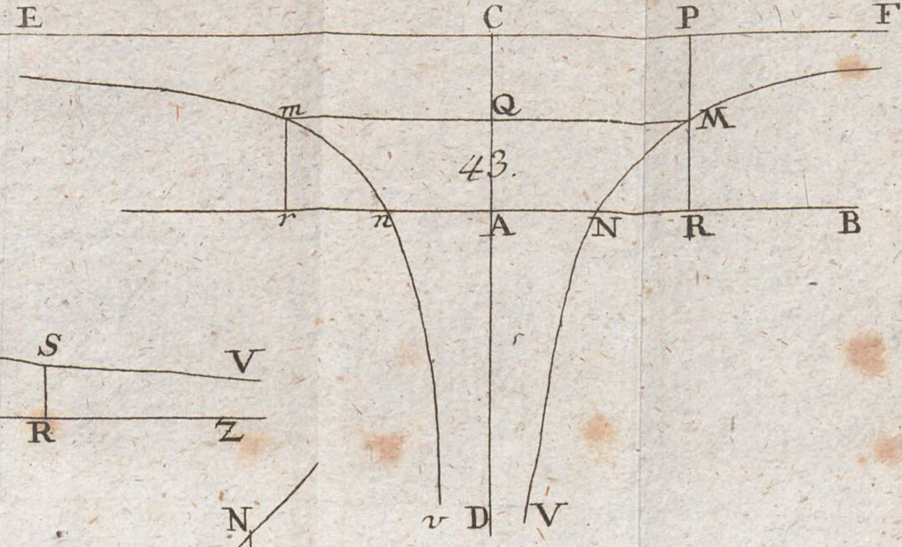
41



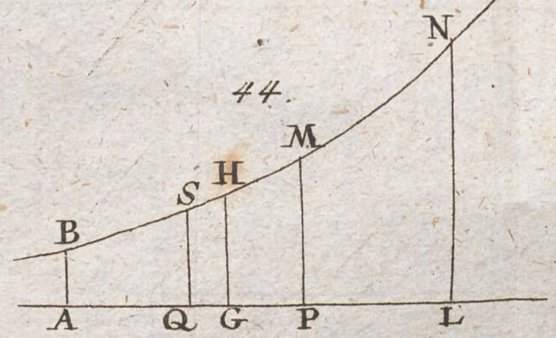
42.



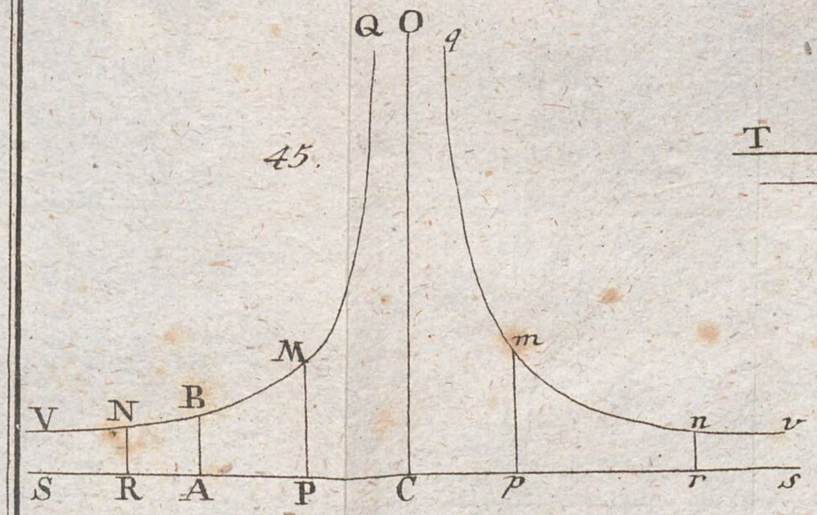
43.



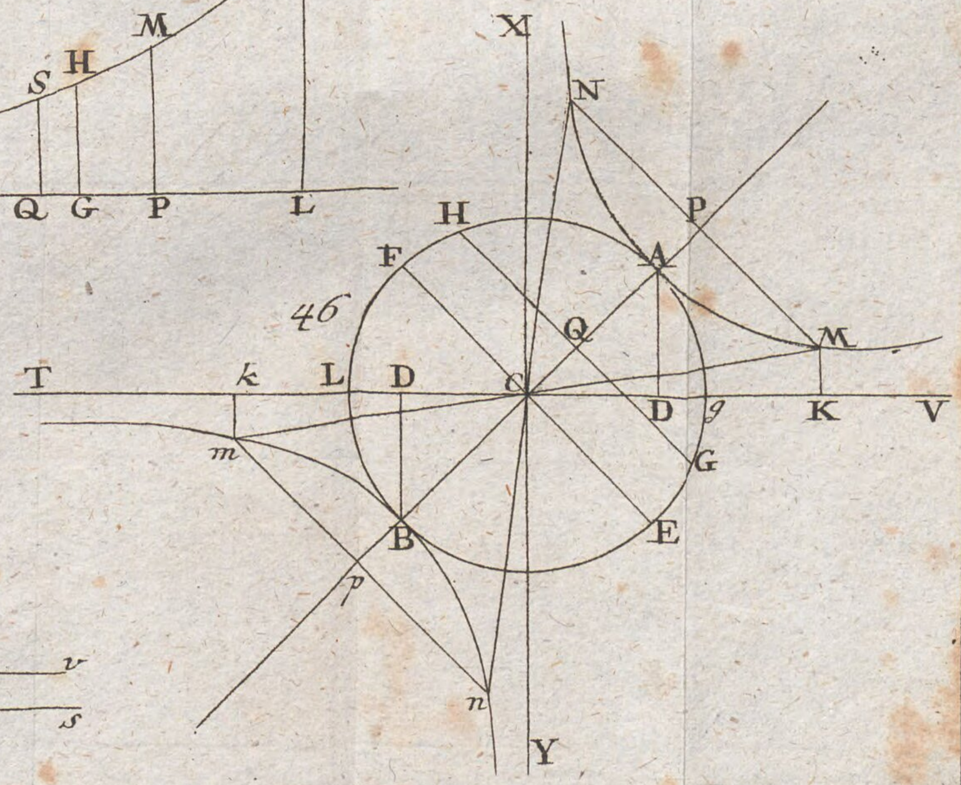
44.



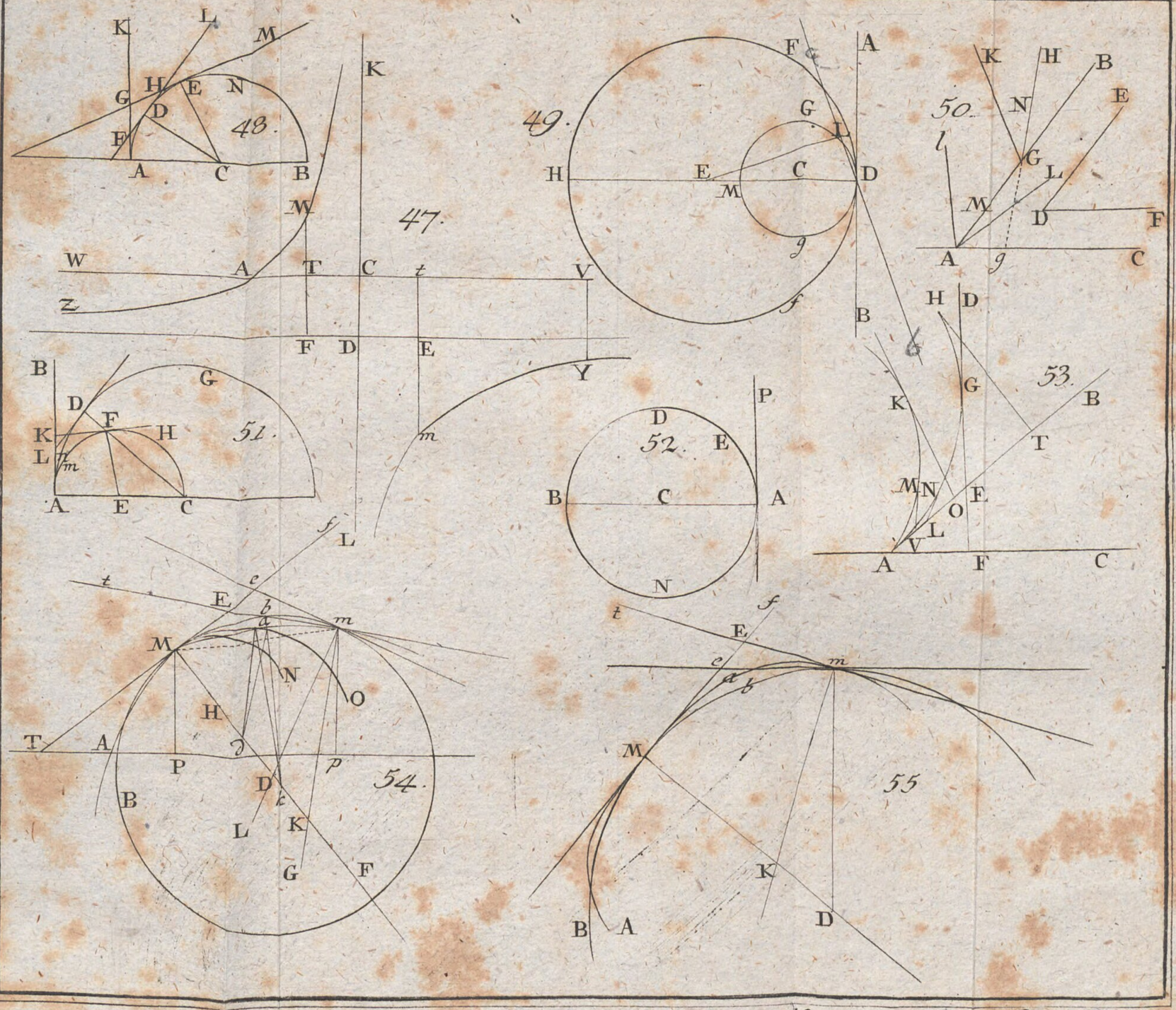
45.



46



Karstens Math. Abhandl.


48.
47.
49.
50.
51.
52.
53.
54.
55.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Karsten, Wenceslaus Johann Gustav,

Des Hofraths und Professors der Mathematik und Naturlehre in Halle, Wencesl. Joh. Gustav Karstens mathematische Abhandlungen theils durch eine Preisfrage der Königl. Pr. Acad. vom Jahr 1784 über das Mathematisch-Unendliche, theils durch andre neuere Untersuchungen veranlasset. Mit

Halle im Magdeburgischen 1786

A.gr.b. 1438#Beibd.1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10235926-4
VD18 14483181